今後の研究計画

Pisot 有限性間の関係

$\beta > 1$ とする。Frougny と Solomyak は次の 3 つの有限性条件を提議した。

$$(\mathrm{F}_1)\quad \mathbb{Z} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$

$$(\mathrm{PF})\quad \mathbb{Z}_+[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$

$$(\mathrm{F})\quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$

ここに $\mathrm{Fin}(\beta)$ は $|x|$ 有限ベータ展開をもつ実数 x の全体とする。これまでに有限性条件に関する興味深い結果が知られている。それらをまとめると次のようになる。

	β のクラス	$\mathrm{Fin}(\beta)$ の構造	(F)となるための条件	(PF)となるための条件
(F_1)	Pisot 数	?	?	?
(PF)	Pisot 数	+について閉	$d_\beta(1)$ が有限	—
(F)	Pisot 数	環	—	—

表からも分かるように(F_1)については私の知る限りよく分かっていない。そこで(F_1)と他の有限性条件との関係、及び(F_1)の下での $\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造を研究したいと考えている。

(F_1)の判定可能性について

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1x - a_0$ とし、$\mathbb{Z}^{d-1}$ 上の変換 τ_β を

$$\tau_\beta(l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \coloneqq \left(l_2, \cdots, l_{d-1}, -\left\lfloor l_1a_0\beta^{-1} + l_2(a_1\beta^{-1} + a_0\beta^{-2}) + \cdots + l_{d-1}(a_{d-2}\beta^{-1} + \cdots + a_0\beta^{-d+1})\right\rfloor\right)$$

と定義する。τ_β はベータ変換 T に対応する変換になる。また $\tau_\beta^*(\boldsymbol{l}) := -\tau_\beta(-\boldsymbol{l})$ とし、

$$Q_\beta := \left\{\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1} \middle| \exists\{\boldsymbol{l}_n\}_{n=1}^N\ s.t.\ \boldsymbol{l}_N = \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}_{n+1} \in \left\{\tau_\beta(\boldsymbol{l}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{l}_n)\right\} and\ \boldsymbol{l}_1 = (0, \cdots, 0, 1)\right\}$$

とおく。このとき、β が Pisot 数なら Q_β は有限集合となる。私は最近の研究で、任意の$\boldsymbol{l} \in Q_\beta$ に対し $\tau_\beta^n(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}$ となる $n \geq 0$ が存在するなら(F)を満たし、$\left(\tau_\beta^*\right)^n(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $n \geq 0$ が存在するなら(PF)を満たすことを示した。これにより与えられた β が(F)を満たす、または(PF)を満たすか否かは Q_β の要素を調べること判定することができる。そこで Q_β での判定可能性について同様の主張が得られないか研究したいと考えている。すなわち、以下の表のクエスチョンが、私の今後の研究目標である。

	$\mathrm{Fin}(\beta)$ の構造	(F)となるための条件	(PF)となるための条件	Q_β での判定可能性
(F_1)	?	?	?	?
(PF)	+について閉	$d_\beta(1)$ が有限	—	$\forall\boldsymbol{l} \in Q_\beta, \exists n; \left(\tau_\beta^*\right)^n(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}$
(F)	環	—	—	$\forall\boldsymbol{l} \in Q_\beta, \exists n; \tau_\beta^n(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}$