

これまでの研究成果のまとめ

$\beta > 1$ とする。以降、 y の整数部分を $[y]$ 、小数部分を $\{y\}$ と表し、 $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ を $T(x) = \{\beta x\}$ と定義する。このとき $x \in [0,1]$ に対し $c_n = [\beta T^{n-1}(x)]$ とおくことで x のベータ展開

$$x = c_1\beta^{-1} + c_2\beta^{-2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta^{-n}$$

を得る。これを $d_\beta(x) = c_1c_2\cdots$ と表す。 $d_\beta(x)$ の末尾が 0 のみとなるとき、 $d_\beta(x)$ は有限であるという。以下、 $d_\beta(x)$ が有限となる $x \in [0,1]$ の全体を $\text{Fin}(\beta)$ と表す。

任意の正整数は有限な 10 進展開をもつ。Frougny と Solomyak はこの有限性条件の一般化として、 β に関する条件

$$(PF) \quad \mathbb{Z}_+[\beta^{-1}] \cap [0,1] \subset \text{Fin}(\beta)$$

$$(F) \quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \cap [0,1] \subset \text{Fin}(\beta)$$

を考えた。

(1) 有限ベータ展開とオドメーター (論文リスト[1])

$x \in (0,1]$ に対し $d_\beta^*(x) = d_\beta(x-0)$ と定義し、 $\{x\}^* = \lim_{y \uparrow x} \{y\}$ 、 $M = d_\beta([0,1)) \cup d_\beta^*((0,1])$ とする。また $v: M \rightarrow [0,1]$ を $v(w_1w_2\cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n\beta^{-n}$ と定める。実数 γ に対し $H_\gamma: M \rightarrow M$ を、

$$H_\gamma(w) := \begin{cases} d_\beta(\{\gamma + v(w)\}) & \text{if } w \text{ が有限} \\ d_\beta^*(\{\gamma + v(w)\}^*) & \text{if } w \text{ が有限でない} \end{cases}$$

と定義し、特に $H_{\beta^{-1}}$ を β に付随するオドメーターと呼ぶ。私は吉田雅通氏との共同研究において、(F) はオドメーターの全射性と同値になり、(PF) をオドメーターの単射性と同値になることを示した。さらに β が代数的整数の場合には、 $H_{\beta^{-1}}$ の導出過程を有限オートマトンで記述することができる。これにより β が (F) を満たすこととオドメーターの計算可能性が同値になることを証明した。

(2) 有限性条件を満たす 3 次の Pisot 数のいくつかのクラスについて (論文リスト[2])

Akiyama は 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすものを特徴づけた。さらに Akiyama は Brunotte らとの共同研究の中で、set of witnesses という集合を利用して 3 次の場合の (F) を満たすクラスをいくつか発見した。しかし一般には set of witnesses は非常に大きい集合になるため、手計算で (F) を判定することが難しい。私は吉田雅通氏との共同研究で、オドメーターを記述する有限オートマトンを利用して、Akiyama の 3 次の Pisot 単数の定理の拡張を得、さらにそれが手計算の範囲で判定できることを証明した。またその証明の中で、set of witnesses より厳密に小さい集合によって (F) を判定できるクラスが存在することも発見した。同時に、Akiyama らの手法では (F) が判定できなかったクラスで (F) を満たすものを発見した。