これまでの研究成果のまとめ

私はこれまで正標数における商特異点の研究を行ってきた。商特異点とは滑らかな多様体に対し有限群が作用しているとき、その作用で割った商多様体に現れるような特異点のことであり特異点の中でも基本的なクラスである。商特異点は標数 0 においては良い振る舞いをすることが知られており、例えば商特異点は極小モデル理論で使われるクラス分けにおいて log terminal というクラスに分類されることが知られている。私は標数 0 における商特異手についての結果の一つである Batyrev の定理に着目して研究を進めてきた。Batyrev の定理は標数 0 においてゴレンシュタインな商特異点がクレパント特異点解消という特別な特異点解消をもつならば、そのクレパント特異点解消で得られる滑らかな多様体のオイラー標数が作用している有限群の共役類の個数と一致するというものである。クレパント特異点解消は一般には存在しないが、3 次元以下のゴレンシュタイン商特異点に関しては存在することが、Roan, Ito, Markushevich らによって示されている。また Bridgeland , King, Reid らは圏論的な議論を用いて 3 次元以下の多様体についてクレパント特異点解消の存在と Batyrev の定理が成り立つことを示している。

Batyrev の定理を正標数に拡張できないかと言うことが私の研究の出発点であったが、Batyrev の定理自体は正標数において成り立たないことがわかっている。そこで Batyrev の定理を正標数の場合にも通用するような改良を考えることを新しく目標に据えていた。その手段として有力と思われる手段として Yasuda 氏によって証明された野性的マッカイ対応がある。これは弦モチーフと呼ばれる不変量が G トーサーのモジュライ空間上のモチーフ積分の値と一致するというもので、標数 0 において Batyrev や Denef-Loeser らによって証明された結果の正標数への一般化になっている。弦モチーフはその特異点のクラスなどの多くの情報を持った不変量であり、この計算方法を得ることは特異点を調べる上で重要であるといえる。また野性マッカイ対応の離散版として弦点数が局所体のエタール拡大の重みつき数え上げと一致するという形があり、これを n 次対称群の 2n 次元のアフィン空間への置換作用によって定まる商多様体に適用することにより数論的に重要な公式である Serre-Bhargava の量公式が得られている。私はこれをすでに得ていた Batyrev の定理の反例となる商特異点に対して適用することにより違う視点からオイラー標数の計算を検証した。重みつき数え上げの計算に必要な v 関数は標数 0 においては行列の age 関数や表現論における Artin 導手と一致するものであり、これを様々な表現について計算することも数論的に意義のあることである。この反例における局所体のエタール拡大の重みつき数え上げにおいては対称群の作用に関する v 関数の値を初めて計算している。