

5 今後の研究計画

準 F -分裂性をめぐり、今後の研究計画は §1 代数幾何学的方向と §2 数論幾何学的方向の二つに分けられる。

5.1 準 F -分裂理論の双有理幾何学, 可換環論に属する研究計画

もともと F -分裂理論は様々な分野において研究が進んでいたが、特に正標数の代数幾何学, 可換環論における重要性は大きい。そこで準 F -分裂理論をこの二つの分野, 特に双有理幾何学に関連する話題への応用を計画している。

極小モデルプログラム (MMP) は代数幾何学における双有理幾何学という分野に属する重要な理論である。標数 0 においては研究が大変進んでいたが、近年正標数においても理論が確立されてきており、特に、基礎体の標数が 7 以上ならば 3 次元射影多様体に対して、極小モデルプログラムが成立することが示された。基礎体の標数に条件が付いていることは、前節で述べた事実“標数が 7 以上ならば、RDP は F -分裂である”ことと密接に関連している：

標数	3次元 MMP	RDP
0	成立する (森, 1988)	
7 以上	成立する (Hacon-Xu, 2015)	F -分裂
2, 3, 5	?	F -分裂とは限らない しかし準 F -分裂 する!

さて、すでに述べた私の結果“標数 2, 3, 5 においても RDP は準 F -分裂である”ことを思い出すと、準 F -分裂理論を使うことで 3 次元極小モデルプログラムが標数 2, 3, 5 においても発展できる可能性が出てくる。もちろんこのために準 F -分裂の理論自体を発展させることは必須である。以下はそのうち重要度が高いものであり、一部はすでに東京大学の田中公氏とミシガン大学の Jakub Witaszek 氏との共同研究として進行中である：

- 準 F -分裂性に対する、いわゆる同伴/逆同伴の問題に取り組む。すなわち代数多様体 X とその因子 $S \subset X$ に対し、 X 上の準 F -分裂と S 上のそれとの関係について研究する。これにより特に高次元の多様体の研究を、より低次元の多様体の研究に帰着できることが期待される。
- (準) F -分裂により捉えることのできる多様体のクラスはいわゆる“ファノ型”と“カラビヤウ型”である。双有理幾何学においては特にファノ型の多様体に対する深い理解は必須である。このクラスの幾何学を正標数のフロベニウス写像の言葉で捉えるものとして、 F -分裂より強い F -正則性というものが知られている。研究目標の一つは、準 F -分裂より強い概念で F -正則性を拡張する概念(“準 F -正則性”)を定義しその性質を研究することである。これも上記の極小モデル理論への応用のために必須である。
- F -分裂特異点は、極小モデル理論において重要な特異点のクラスである対数的標準特異点と密接に関連することが知られている。そこで準 F -分裂特異点と対数的標準特異点の関係について研究を行う。

以上の研究計画において、 F -分裂の時は存在しなかった技術的課題として、Witt 環の理論の発展が必要とされているので、この方面での研究も並行して進めていく予定である。特に D. Kaledin による、topological cyclic homology と関連した Witt 環の構成に着目している。

5.2 準 F -分裂理論の数論幾何学に属する研究計画

より数論幾何学的な研究としては、次の二つを計画している。

(1) 近年 Piotr Achinger 氏と Maciej Zdanowicz 氏の研究により、 F -分裂理論と ordinary カラビヤウ多様体の Serre-Tate 理論の間に密接な関係があることがわかってきている。本研究目標は、この関係を拡張し、準 F -分裂と高さ有限のカラビヤウ多様体の局所モジュライ空間の構造の関係を解明することである。

F. Oort 氏の研究により、正標数のアーベル多様体のモジュライ空間には様相構造が存在することが知られている。この構造が $K3$ 曲面の局所モジュライ空間にも存在することが Jeng-Daw Yu 氏により発見された。本研究の目標をより詳しく述べると、準 F -分裂とこの様相構造の対応を解明することである。これは正標数の多様体の“幾何学的変形”と“数論的変形”の対応を考察するという点で大変興味深いものであると言える。さらにこれは \mathbb{C} 上のカラビヤウ多様体のモジュライ空間のアフィン構造と関連する可能性をもち、ミラー対称性の数論的研究に発展する可能性を持つものである。

(2) この研究では高さ有限カラビヤウ多様体が標数 0 に持ち上げ可能であること(もしくは成り立たないこと)を示すことが大きな目標である。すでに述べたように、準 F -分裂の理論を適用することで $\text{mod } p^2$ に持ち上げ可能であることはわかっている。この方針をさらに推し進めるために、準 F -分裂理論の相対版(すなわち底空間を一般のアルティン局所環とする理論)を、Andreas Langer 氏と Thomas Zink 氏による相対 de Rham-Witt 複体を用いて拡張する予定である。これは最終的に“混標数における F -分裂”の理論を構築することにつながると期待している。