

3 これまでの研究成果

私の専門分野は“数論幾何学的観点からの正標数の代数幾何学”であり、これまでの研究成果は次の二つに分けられる。

3.1 準 F -分裂性の研究

私のこれまでの研究で最大の業績は“準 F -分裂性 (quasi- F -split)”という概念を導入したことである。

これは正標数のスキームに対して定義される概念で、 F -分裂性 (F -split) を拡張したものになっている。 F -分裂性はもともと Mehta-Ramanathan により 1980 年代に導入され、正標数のシューベルト多様体上の直線束のコホモロジーの研究に応用された。また同等の概念が、Hochster 等により 1960 年代後半から可換環論の一分野である密着閉包理論において研究されてきた。これは近年 F -特異点の理論として発展し、正標数の双有理幾何学にも応用されている。

このように F -分裂理論は、可換環論、幾何学的表現論、正標数の代数幾何学など様々な観点から研究が進んでいた。私はさらに新たに、 **F -分裂性の数論幾何学的観点からの研究を開始した**。動機となるテーマは正標数のカラビヤウ多様体の研究であった。以下これについて解説する。

正標数のカラビヤウ多様体に対して Artin-Mazur 高さと呼ばれる、正の整数または無限大に値をとる不変量が定義される。これは正標数の楕円曲線に対する ordinary と supersingular の違いを拡張した不変量になっており、形式群の理論を用いて定義される。この不変量はクリスタリニコホモロジーへのフロベニウス作用に関する傾き 1 未満部分の情報を捉えており、数論幾何学的な量であると言える。K3 曲面や 3 次元カラビヤウ多様体のこれまでの研究から、Artin-Mazur 高さが有限であるか無限であるかによって、多様体の幾何学的性質 (例えば単有理性や変形空間の特異性) が大きく異なっていることがわかってきた。

私は、カラビヤウ多様体に対し、Artin-Mazur 高さが 1 であることは F -分裂することは同値であることに着目し、Artin-Mazur 高さが有限である部分を理論的に捉えることは、数論幾何学的観点および代数幾何学的観点両方から有意義であろうという期待のもと研究を開始し、以下の成果を得た ([2])。

1. 正標数のスキームに対し、準 F -分裂高さ (quasi- F -split height) という不変量を導入し、
2. 準 F -分裂高さが 1 であることと、 F -分裂であることは同値であり、
3. カラビヤウ多様体に対し、準 F -分裂高さが Artin-Mazur 高さと一致することを示した。

また X が準 F -分裂 (quasi- F -split) であるとは、その準 F -分裂高さが有限であるときと定めた。

ここで、準 F -分裂性の定義は述べないが、構造層の Witt 環を用いることで、構造層上の接続層の言葉で定義できることがポイントになる。この点を有効に使うことで、 X が準 F -分裂であるならば、

1. X は $\text{mod } p^2$ に持ち上げ可能である (ただし p は X が定義されている体の標数)。
2. X は小平消滅定理を満たす

ことなどを証明した。どちらも一般の正標数の代数多様体では成り立たないことが知られている。さらにアーベル多様体や Enriques 曲面の準 F -分裂性の研究を行った ([3])。また東京電機大学の中島幸喜氏と共同で $\log$ スキームに対しての準 F -分裂性の研究を行った ([4])。

以上の研究は大域的な多様体を主眼に置いていたが、特異点、特に 2 次元有理二重点 (RDP) に関する研究を開始した。標数 7 以上では RDP は F -分裂であるが、標数 5 以下では一般には F -分裂でないことが知られていた。しかし私は**標数 2, 3, 5 においても全ての RDP が準 F -分裂することを示した**。

3.2 Supersingular アーベル多様体のモジュライ空間と mass 公式の研究

この研究は、Deuring による supersingular 楕円曲線の mass 公式の高次元化に関するものである。Mass 公式は元々は代数群の類数の計算と関連した数論的な問題であるが、本研究では supersingular アーベル多様体のモジュライ空間に関する Li-Oort の研究を援用し、幾分幾何学的な色彩が強いものになっている。この問題の定式化には、いくつかの異なる方法が知られているが、その一つに Chia-Fu Yu 氏と Jeng-Daw Yu 氏によるアーベル曲面に関する研究がある。これを拡張する形で、Chia-Fu Yu 氏と Valentijn Karemaker 氏と共同で 3 次元アーベル多様体に対する mass 公式の研究を行った ([5])。この共同研究の過程で、supersingular アーベル多様体の自己同型群に関する Oort 予想を 3 次元の場合に解決した。