M. Khovanov は Jones 多項式を精密化するホモロジカル結び目不変量を構成した．Jones 多項式は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と 2 次元既約表現を使用して構成した結び目量子不変量であることは良く知られている事実である．この事実から次の自然な問題を解くことに応募者は取り組んできた．

他の結び目量子不変量を精密化するホモロジカル結び目不変量を構成できるか?

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_n)}(\wedge^{\underline{i}}, \wedge^{\underline{j}}) \arrow[d, squiggly, "\substack{\text{Yonezawa} \\ \text{[Doctoral thesis]}}"'] & U_q(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\gamma_m^n"'] \arrow[r, "\gamma_m"] \arrow[d, squiggly, "\substack{\text{Khovanov-Lauda,} \\ \text{Rouquier}}"] & \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(S^{\underline{i}}, S^{\underline{j}}) \arrow[d, squiggly, dotted, "\substack{\text{Khovanov-Lauda-} \\ \text{Sussan-Yonezawa}}"] \\
\substack{\text{Link invariant} \\ CKh(q,t,s)} & \mathrm{HMF}_m^n \arrow[l, Rightarrow] & \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\Gamma_m^n", "\text{Mackaay-Yonezawa}"'] \arrow[r, "\Gamma_m", "\substack{\text{Khovanov-Lauda-} \\ \text{Sussan-Yonezawa}}"'] & \mathrm{Bim}(m,k)
\end{tikzcd}$$

(1) 論文 “Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations”の要約: Khovanov と Rozansky は, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ と n 次元既約表現を使用して構成した結び目量子不変量を精密化するホモロジカル結び目不変量を定義するために, 行列因子化を導入した．この論文で, Khovanov–Rozansky の行列因子化を一般化し, $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現を使用して構成した結び目量子不変量を精密化する新しい結び目不変量 $CKh(q,t,s)$ を定義した．(上図の青字の研究)．結び目不変量 $CJ(q)$ は $CKh(q,-1,1)$ として復元される．

(2) 論文 “$\mathfrak{sl}_N$-Web categories and categorified skew Howe duality”の要約: 反対称テンソル $\wedge^k(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ 上には, 互いに可換な左 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ 作用と右 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ 作用が存在する．したがって, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ 表現が得られる.(上図の左上の射).

$$\gamma_m^n : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \bigoplus_{\sum_{\alpha=1}^m i_\alpha = k, \sum_{\alpha=1}^m j_\alpha = k} \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_n)}(\wedge^{i_1} \otimes \cdots \otimes \wedge^{i_m}, \wedge^{j_1} \otimes \cdots \otimes \wedge^{j_m}),$$

ここで, $\wedge^i$ は第 i 番目の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ 基本表現 $(i = 1, ..., n-1)$ と自明表現 $(i = 0, n)$．我々は次の二つの事実を持っている: (A) 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は Khovanov–Lauda と Rouquier によって導入された圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ によって圏化される (上図の中央波線)．(B) $\bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_n)}(\wedge^{\underline{i}}, \wedge^{\underline{j}})$ は応募の学位論文で導入した行列因子化の圏 HMF_n^m によって圏化される (上図の左波線)．これら事実から, 関手 $\Gamma_m^n : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \to \mathrm{HMF}_m^n$ の存在を我々は期待し (上図の左下緑関手), この論文でこの関手を構成した．

(3) 論文 “Braid group actions from categorical symmetric Howe duality on deformed Webster algebras”の要約: 対称テンソル $S^k(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$ 上に, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ 表現がある (上図の右上の射)．テンソル表現 $S^{\underline{i}} = V_{i_1 \varpi} \otimes \cdots \otimes V_{i_m \varpi}$ は Webster 代数の射影加群圏によって圏化される事実から, 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ から Webster 代数の加群圏への関手の存在を期待した．しかし, Webster 代数を使用した関手の構成には様々な難しさがあった．論文では変形 Webster 代数 $W(\mathbf{s}, k)$ を定義し, 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ から $W(\mathbf{s}, k)$ の加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ への関手 Γ_m を構成した (上図の右下オレンジ関手)．さらに, この関手を使用して加群圏のホモトピー圏 $K^b(\mathrm{Bim}(m,k))$ 上に組紐群の作用を定義した．