2. 今後の研究計画

(複素) 代数ファイバー空間 $f : X \to B$ とは、複素数体上射影多様体 X, B 間のファイバー連結な全射正則写像のことである。

応募者は、B **が射影曲線かつファイバーが一般型代数多様体である代数ファイバー空間について、相対数値不変量に関する研究に取り組む計画**を立てている。以下、ファイバー空間 $f : X \to B$ と言えば、B は射影曲線かつファイバーは一般型代数多様体であるとする。複素次元 $\dim(X) = n$ のファイバー空間 $f : X \to B$ には、相対標準束 K_f の自己交点数 K_f^n, 相対オイラー数 χ_f, 相対標準束の順像の次数 $\mathrm{deg} f_* K_f$ といった相対数値不変量が定義される。**ファイバー空間は多種多様で、幾何学的な構造を統一的に理解することはできない**。そこでファイバー空間の地誌学的研究が、基本的な研究指針となる。**ファイバー空間の地誌学的研究**とは、K_f^n, $\mathrm{deg} f_* K_f$, χ_f といった相対数値不変量の間の不等式と、ファイバー空間の幾何学的現象との関連を研究する態度である。ファイバー曲面の研究において、地誌学的研究は中心に位置していた。しかし、X が 3 次元以上のファイバー空間の地誌学的研究は、発展途上であり、基盤すら確立されていない。申請者は、**一般次元のファイバー空間で、地誌学的研究の基盤の確立**を研究計画とした。具体的には、次の研究課題がある。

1. ファイバー空間の自明性について

ファイバー空間が、ファイバー束であることの相対数値不変量による特徴付けが与えられていない。複素構造の変形理論の観点から、ファイバー空間を射影多様体の変形族と見たときに、複素構造の変形が起きるか否かを数値量のみにより判定できるのかという問題である。ファイバー曲面の場合は、ファイバー束であることが $\mathrm{deg} f_* K_f = 0$ で特徴付けられていた。これに相当する結果を、3 次元以上で見出す。

2. 相対数値不変量の存在領域について

相対数値不変量がとりうる数値の範囲を、存在領域という。一般次元のファイバー空間に対して、K_f^n, $\mathrm{deg} f_* K_f$ の下限は 0 であることが知られている。しかし、相対オイラー数 χ_f の下限は不明である。相対数値不変量の最良な存在領域の明示は、地誌学的研究の基盤である。ファイバー曲面の場合、相対オイラー数 χ_f は $\mathrm{deg} f_* K_f$ に一致することから、下限は 0 であった。しかし、3 次元ファイバー空間には負となる例が存在する。相対オイラー数 χ_f の下限を見出したい。

3. ファイバー空間のベクトル束 $f_* K_f$ の正値性について

ファイバー束でないファイバー空間 $f : X \to B$ は、十分大きな正の整数 m について、$f_* K_f^{\otimes m}$ がアンプルという正値性を持つことが知られている。一方、$f_* K_f$ は自由直和成分の影響を受けて、一般にアンプルとは限らない。アンプルの阻害要因である自由直和成分に関する研究が、3 次元以上の場合に全くされていない。ファイバー曲面では、$f_* K_f$ の自由直和成分のランクは、多くの場合に f のスロープ $K_f^2 / \mathrm{deg} f_* K_f$ の下限を引き上げていた。しかし 3 次元以上でこの現象が起こるかは不明である。そこで、3 次元ファイバー空間について、自由直和成分が f のスロープに与える影響を明らかにする。