これまでの研究成果のまとめ

浅芝 秀人

これまでの研究は大きく分けて次の 6 つに分類できる。

(1) 直既約加群に条件を課したアルティン環の構造の決定
(2) 第 1 太刀川予想に関する研究
(3) 自己入射多元環の導来同値分類に関する研究
(4) 導来同値を導くための線形圏の被覆理論
(5) テイム多元環のホール代数を用いた単純リー環の構成
(6) 加群の分解理論（位相的データ解析への応用）

以下，各課題について解説する。

(1) A をアルティン環，J をそのジャコブソン根基，$n \geq 1$ とする。右 A 加群 M は，$\operatorname{top}^n M := M/MJ^n$ が直既約であるとき，**第 n 局所的**であるといい，直既約右 A 加群がすべて第 n 局所的であるとき，A を**右第 n 局所型**であるという。$n = 1$ のときが普通の局所加群であり，右局所型の環である。右局所型アルティン環は，太刀川弘幸によってその構造が決定されていた。この課題では，右第 2 局所型アルティン環の構造を大体定め，特別の場合に完全に決定した。また A が代数閉体上の有限次元多元環の場合に，A がこの型であることを関係式付クイバーを用いて特徴付けた。

(2) 中山予想の成立は，第 1 太刀川予想と第 2 太刀川予想の両方が成立することと同値である。この課題では，体 k 上の有限次元多元環 A は，$\operatorname{Ext}_A^n(DA, A) = 0$ $(\forall n \geq 1)$ であれば自己入射的であろう，という第 1 太刀川予想について研究した。ただし $D := \operatorname{Hom}_k(\cdot, k)$ とおいた。A が可換局所環であるときには，$n = 1$ のみでこれが成立することを示した。

(3) Rickard は，ブラウアー樹木多元環全体に対して，導来同値のもとでの完全不変量を求め，導来同値分類を与えた。この課題での初期の研究では，この結果を有限表現型自己入射多元環の全体にまで拡張し，導来同値のもとでの完全不変量（導来型）を決定し，導来同値のもとでの完全代表系も与えた。この分類はさらに有限表現型とは限らない（ワイルド表現型も含む）自己入射多元環のクラスにも少しずつ拡張している。

(4) この課題では，上の問題を解くときに決定的な役割を果たした多元環の被覆理論を，より一般化し，強力な道具にすることを目指している。主定理は次の形に書ける：2 つの線形圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ に群 G が作用しているとき，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ の導来同値を与える傾部分圏がある条件を満たせば，それらの軌道圏 $\mathcal{C}/G$ と $\mathcal{C}'/G$ は導来同値となる。この定理は遙かに広い設定における結果にまで拡張することができた。すなわち，線形圏への群の作用による軌道圏構成を，小圏の擬作用（余擬作用）によるグロタンディーク構成に拡張した場合について同様の定理を証明した。これにより，多くの（無限個でもよい）導来同値を貼り合わせて，新しい導来同値を構成することができるようになった。

(5) 単純リー環に対して，Ringel は有限表現型の遺伝多元環のホール代数を用いて正部分を構成していた。また，Xiao–Peng は全部分を構成していたが，部分が人工的に貼り合わせられ，演算も人工的でホール代数による演算だけでは構成されていなかった。この研究では，テイム型の遺伝多元環（あるいはテイム型の標準多元環）のホール代数を用いてまずより大きなリー環を構成し，その剰余代数をとることによって単純リー環の全部分を構成した。これにより，演算の全体がホール代数による演算によって自然に定義することができた。

(6) これは，多元環の表現論を位相的データ解析に応用する CREST 研究である。この課題は，多元環の表現論から見ると，与えられた加群の直既約分解を求める問題になる。Auslander-Reiten 理論を用いて，直既約加群の重複度の一般公式を与え，ある有限型の場合に，行列問題を用いて与えられた加群を分解する具体的手順を与えた。