

今後の研究計画

阿蘇 愛理

私は今後の研究内容として、種数が等しいミュータント結び目に対して、ホロノミー表現に関するねじれアレクサンダー多項式が一致するか否かを調べたいと考えている。

一般に、ミュータントの関係にある結び目のペアは、アレクサンダー多項式 [1] やジョーンズ多項式 [2], 双曲体積 [3] を共有することが知られている。一方で、結び目の種数についてはミュータントであっても異なる場合があることが知られている [4]。例えば、樹下・寺阪結び目とコンウェイ結び目と呼ばれる2つの11交点の結び目は、ミュータントの関係にあり、種数が異なる。この例においては、結び目の不変量であるねじれアレクサンダー多項式によっても区別できる [5]。しかし、ミュータントのペアで種数が一致する例も存在し、本研究ではそのような結び目を対象にしたいと考えている。

ホロノミー表現に関するねじれアレクサンダー多項式に関する先行研究として、15交点までの双曲結び目に関する研究がある [6]。この結果によれば、15交点以下の全ての双曲結び目に対して、ホロノミー表現に関するねじれアレクサンダー多項式により種数が決定し、多くの例においてはミュータントを区別することもできる。一方で、ねじれアレクサンダー多項式を共有するミュータントのペアの存在も指摘されている。

符号が全て一致する0でない整数の組 (a_1, \dots, a_n) に対し、交代結び目であるようなプレッツェル結び目 $P(a_1, \dots, a_n)$ が定まる。この時、ある a_i と a_j を入れ替えた組から定まるプレッツェル結び目は、元のプレッツェル結び目とミュータントの関係にあることが知られている。また、交代結び目の場合には、アレクサンダー多項式によって種数が決定されるので [7, 8], ミュータントの関係にある2つの交代結び目は常に種数を共有することがわかる。よって、タングルの入れ替えで得られる無限個のミュータントのペアは、種数が等しい。このようなペアに対して組織的にホロノミー表現に関するねじれアレクサンダー多項式を計算し、各ペアに対してねじれアレクサンダー多項式が一致するか否かを調べる。結び目の無限族に対して組織的にホロノミー表現を求めることは一般に困難であるが、 $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目における計算 [9] と同様の手法により、ホロノミー表現を得ることが可能であると考えている。

参考文献

- [1] O. Ya. Viro, *Non-projecting isotopies and knots with homeomorphic covers*, J. Soviet Math. **12** (1979) 86–96.
- [2] W. B. R. Lickorish, *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc., **267** (1981), 321–332.
- [3] D. Ruberman, *Mutation and volume of knots in S^3* , Invent. Math., **90** (1987), 189–215.
- [4] D. Gabai, *Genera of the arborescent links*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol 59, number 339 (1986), 1–98.
- [5] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology, **33** (1994), 241–256.
- [6] N. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math., **21** (2012), 329–352.
- [7] K. Murasugi, *On the Genus of the Alternating Knot. I, II.*, J. Math. Soc. Japan, **10** (1958), 94–105, 235–248.
- [8] R. Crowell. *Genus of Alternating Link Types*, Ann. of Math., (2) **69** (1959), 258–275.
- [9] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of $(-2, 3, 2n+1)$ -pretzel knots*, Hiroshima Math. J., **50** (2020), 43–57.