これまでの研究成果

阿蘇　愛理

ねじれアレキサンダー多項式は古典的な結び目の不変量であるアレキサンダー多項式の一般化であり, 結び目とその補空間の基本群の表現に対して定義される. ねじれアレキサンダー多項式は 1990 年代に Lin によって導入され [1], 和田によって有限表示群に対しても定義された [2]. ねじれアレキサンダー多項式を用いることで, 樹下・寺阪結び目と Conway の 11 交点の結び目のようなアレキサンダー多項式では区別できない 2 つの結び目を区別できることが和田によって示されている [2].

一般には, 結び目 K のねじれアレキサンダー多項式と結び目の種数およびファイバー性に関係があることが知られている. つまり, 結び目 K に対して任意の $\pi_1(S^3\backslash K)$ の非可換な $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-表現 $\rho : \pi_1(S^3\backslash K) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ に関するねじれアレキサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho}(t)$ の次数 (すなわち, 最高次と最低次の次数の差) は結び目の種数を用いて抑えることができ, ファイバー結び目に対してはモニック多項式になることが知られている [3].

結び目が双曲結び目であるとは, その補空間が有限体積の完備双曲構造を許容することである. 双曲結び目に対しては, ホロノミー表現と呼ばれる自然な表現が存在する. 双曲結び目の種数およびファイバー性をこの表現に関するねじれアレキサンダー多項式により決定できることが, Dunfield–Friedle–Jackson によって予想されている (以下, 予想 A と呼ぶ) [4].

私は $(-2,3,2n+1)$ プレッツェル結び目と呼ばれる有名な結び目の無限族に対して, ホロノミー表現を含む表現の族に関するねじれアレキサンダー多項式を計算し, 前述の予想 A が成立していることを確認した [5]. その後, $(-2,3,2n+1)$ プレッツェル結び目や 2 橋結び目と呼ばれる結び目の無限族を含む, より一般の結び目の無限族であるトンネル数が 1 のモンテシノス結び目に対しても研究を行った [6]. トンネル数が 1 のモンテシノス結び目は 3 つの場合に分けることができ, 1 つ目の 2 橋結び目や 2 つ目の $(-2,3,2n+1)$ プレッツェル結び目を含む結び目の無限族に対しては, ねじれアレキサンダー多項式の次数および最高次の係数を求め, これらの場合の予想 A をホロノミー表現に関する条件に帰着させた. また, 3 つ目の結び目の無限族に対しては, $(-2,3,2n+1)$ プレッツェル結び目の場合と同様にねじれアレキサンダー多項式を求め, 予想 A が成立していることを確認した.

ねじれアレキサンダー多項式のその他の応用として, 双曲体積との関係が知られている. 3 次元のカスプ付き双曲多様体に対し, そのライデマイスター・トーションの漸近挙動に双曲体積が現れることが Menal-Ferrer–Porti によって示され [7], 結び目のねじれアレキサンダー多項式とライデマイスター・トーションの関係が北野 [8] と山口 [9] によって示されている. それらを用いて, 合田が双曲結び目のホロノミー表現に付随する $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-表現 ρ_n に関するねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動 $(n \to \infty)$ に双曲体積が現れることを示した [10]. さらに, Park はライデマイスター・トーションと双曲体積の関係の一般化を与え, その得られた関係の複素化に複素体積が現れることを予想した [11]. ここで, 双曲多様体 M の複素体積 $\mathrm{cv}(M)$ は, M の双曲体積 $\mathrm{Vol}(M)$ とチャーン・サイモンズ不変量 $\mathrm{cs}(M)$ を用いて $\mathrm{Vol}(M) + 2\pi^2\mathrm{cs}(M)\sqrt{-1}$ で定義される.

私は最近の研究で, 合田の与えた式の複素化を考えるために, 6 交点以下の双曲結び目 K に対して ρ_n に関するねじれアレキサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho_n}(1)$ の漸近挙動を調べ, 等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\pi \log \Delta_{K,\rho_n}(1)}{n^2} = \mathrm{cv}(S^3\backslash K)$$

が成り立つことを予想した. 実際, 6 交点以下の双曲結び目に対しては, 左辺の n を大きくしていくにつれて, 結び目補空間の複素体積 $\mathrm{cv}(S^3\backslash K)$ に近づくことを確認した.

参考文献

[1] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin., **17** (2001), 361–380.
[2] M. Wada,*Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology, **33** (1994), 241–256.
[3] T. Kitano and T. Morifuji, *Divisibility of twisted Alexander polynomials and fibered knots*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. IV (2005), 179–186.
[4] N. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math., **21** (2012), 329–352.
[5] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of* $(-2,3,2n+1)$*-pretzel knots*, Hiroshima Math. J., **50** (2020), 43–57.
[6] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of tunnel number one Montesinos knots*, Kobe J. Math.,**39** (2022)15–61.
[7] P. Menal-Ferrer and J. Porti, *Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds*, J. Topol. 7 (2014), no. 1, 69–119.
[8] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 431–442.
[9] Y. Yamaguchi, *A relationship between the non-acyclic Reidemeister torsion and a zero of the acyclic Reidemeister torsion*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 1, 337–362.
[10] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Jpn. Acad. Ser. A **93** (2017), 61–66.
[11] J. Park, *Reidemeister torsion, complex volume and the Zograf infinite product for hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Topol. **23** (2019) 3687–3734.