今後の研究計画

綾野孝則

私は、論文リスト 1-1 の論文において、種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 2 の射が存在するとき、種数 2 の超楕円関数を Weierstrass の楕円関数で明示的に表示しました。[Katsura and Takashima 2021] では、同種写像暗号の研究の中で、位数 2 の自己同型が存在するような種数 g の超楕円曲線の定義方程式の標準形が与えられています。私は、この条件の下で、g が奇数のとき、種数 g の超楕円関数を種数 $(g-1)/2$ と $(g+1)/2$ の超楕円関数で表示します。また、g が偶数のとき、種数 g の超楕円関数を 2 つの種数 $g/2$ の超楕円関数で表示します。また、[Shaska 2001] では、楕円曲線への次数 3 の射が存在する種数 2 の超楕円曲線の定義方程式の標準形が与えられています。私は、この条件の下で、種数 2 の超楕円関数を Weierstrass の楕円関数で表示します。超楕円関数は KdV 方程式や KP 方程式などの数理物理の基礎方程式を満たすことが知られています ([Buchstaber, Enolski, and Leykin 1997], [Matsutani 2001])。種数 2 以上の超楕円関数については、楕円関数ほど多くのことは分かっていません。超楕円関数を楕円関数で表示できれば、超楕円関数の具体的な数値を Mathematica や Maple などを用いて計算することが可能となります。私は、Abel 関数の抽象的な一般論だけではなく、Abel 関数の具体的な数値を追うということを目標に研究を行っています。これにより、情報科学や数理物理などに具体的な応用が期待できるものと考えています。

$f(x)$ を x の 5 次の多項式、V を $y^2 = f(x)$ で定義される種数 2 の超楕円曲線とします。V 上の正則微分形式 $\omega = {}^t\left(-\dfrac{xdx}{2y}, -\dfrac{dx}{2y}\right)$ に対して、V 上の超楕円積分 $u = \displaystyle\int_{\infty}^{(x,y)} \omega$ を考えます。[Grant 1991], [Buchstaber, Enolski, and Leykin 2012] では、V に付随するシグマ関数 σ を用いて構成されるある 2 変数有理型関数 f_1, f_2 が導入され、座標が $y = f_1(u),\ y = f_2(u)$ と表示できることがそれぞれ示されています。f_1 と f_2 はシグマ関数の零点集合上で一致するので、多変数複素関数の一般論より、$f_1 - f_2 = \sigma h$ となる 2 変数有理型関数 h が存在します。私は、Buchstaber 氏との共同研究において、h を σ を用いて具体的に表示しました (論文リスト 1–3)。一方、[Grant 1988], [Matsutani 2003] では、σ を用いて構成されるある 2 変数有理型関数 g_1, g_2 が導入され、座標が $x = g_1(u),\ x = g_2(u)$ と表示できることがそれぞれ示されています。g_1 と g_2 はシグマ関数の零点集合上で一致するので、多変数複素関数の一般論より、$g_1 - g_2 = \sigma k$ となる 2 変数有理型関数 k が存在します。今後は、k を σ を用いて具体的に表示します。多変数複素関数論において、多変数の有理型関数を 2 つの有理型関数の積に分解するという問題は重要な問題です。私は、多変数シグマ関数の理論を用いて、この問題に対する非自明な例を作ります。

私は、論文リスト 1–3, 1–4 の論文において、種数 $g = 2, 3$ の超楕円曲線に対して、$\mathbb{C}^g$ 全体ではなく、シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出しました。これは、KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています。種数 g の超楕円曲線のシグマ関数の零点集合は、Abel–Jacobi 写像による $g-1$ 個の点の像と一致します。今後は、論文リスト 1–3, 1–4 の論文の結果を拡張し、一般の種数 g の超楕円曲線に対して、Abel–Jacobi 写像による $k(< g)$ 個の点の像の上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出します。これは KdV 方程式を $2g - 2k$ 個のパラメータで変形した偏微分方程式になると考えています。