これまでの研究成果

綾野孝則

楕円関数は 19 世紀の数学の主要な研究対象であり、これまでに具体的で美しい理論が構築されています。それ故、様々な分野で活用され、数学や科学の発展に大きく貢献してきました。一方、科学技術の発達により、Abel 関数 (楕円関数を多変数に拡張した関数) を様々な分野で活用する動きも出てきています。代数曲線の Abel–Jacobi 写像を通して、代数曲線上の代数関数（代数的な対象) と Abel 関数 (解析的な対象) は等価になります。私の研究の目的は、具体的で使いやすい Abel 関数の理論を整備し、それを情報科学 (暗号・符号)、整数論、可積分系などの分野に応用することです。

Weierstrass により定義され、詳しく調べられた楕円シグマ関数 $\sigma(u)$ や楕円関数 $\wp(u)$ は情報科学、物理、工学などの様々な分野に応用されています。これらの関数は楕円曲線と相互に関連します。100 年程前に、F. Klein, H. F. Baker 等によって、超楕円曲線に付随する多変数のシグマ関数およびそれに付随する多重周期の多変数有理型関数 (Abel 関数) の具体的な理論が構築されました。1990 年代に、V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin 等により、超楕円曲線を含む (n, s) 曲線と呼ばれる平面曲線に対するシグマ関数を用いた Abel 関数の理論が構築されました。私は、この (n, s) 曲線の理論を，情報科学の符号理論で取り扱われているテレスコピック曲線と呼ばれるより一般的な代数曲線の族まで拡張しました (論文リスト 1–6, 1–7)。テレスコピック曲線は (n, s) 曲線を含んでいます。この結果は Abel 関数の研究に大きな進展を与えたと考えています。

種数 g の超楕円曲線に付随する Abel 関数は $\mathbb{C}^g$ 上で $2g$ 個の周期を持つ有理型関数です。この Abel 関数は KdV 方程式と呼ばれる数理物理の基礎方程式を満たすことが、Baker, Buchstaber, Enolski, Leykin 等により発見されました。私は、Buchstaber 氏との共同研究において、種数 3 の超楕円曲線に対して、$\mathbb{C}^3$ 全体ではなく、シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^3$ 上の有理型関数という新しいクラスの関数を考察し、この関数で解が書ける可積分方程式を導出しました (論文リスト 1–4, 1–5)。これは、KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています。

19 世紀に、Jacobi, Kowalewski, Königsberger, Bolza などの多くの研究者により、楕円積分に変換できる超楕円積分の様々な例が与えられました。この問題は、代数曲線の被覆、split Jacobian、代数曲線の自己同型群、Humbert variety などの問題と密接に関連し、数論や代数幾何において活発に研究が行われています。この知識は、次世代暗号として注目されている同種写像暗号にも応用されています。私の研究の目的は、この知識を応用し、超楕円関数と楕円関数の間の明示的な関係式を導出することです。この方向の先行研究として、[Enolski and Salerno 1996] では、種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 2 の射が存在するとき、種数 2 の超楕円関数と Jacobi の楕円関数の間の関係式が導出されています。私は、Buchstaber 氏との共同研究において、同じ条件の下で、種数 2 の超楕円関数と Weierstrass の楕円関数の間の関係式を導出しました (論文リスト 1–1)。現在、可積分系や数理物理において、高い種数の代数曲線に付随する Abel 関数で微分方程式の解が書けたとき、その解をより種数の低い代数曲線に付随する Abel 関数で表示できるかという問題に関心が集まっています。また、暗号の分野においても、種数の高い代数曲線に関する計算を種数の低い代数曲線に関する計算に帰着させることに関心が集まっています。私の研究結果は、可積分系や暗号理論などにおいて、今後具体的な応用が期待されるものと考えています。