

# 今後の研究計画

源嶋 孝太

## 背景

1990年代初めに、Gross–Prasad は特殊直交群の対  $SO_{n+1} \times SO_n$  の保型形式の周期の消滅性と、ある保型  $L$ -関数の中心値の消滅性が同値であると予想し、それは後に、Ichino–Ikeda により保型形式の周期と保型  $L$ -関数の中心値の間の等式として再定式化された。一般的な代数群上の保型形式に対して Gross–Prasad 予想や Ichino–Ikeda 予想の拡張を考えることは自然な問題意識である。例えば Gross–Prasad 予想は Gan–Gross–Prasad によりユニタリ群や斜交群のような古典群に対して再定式化されている。その一方で、これらの予想に関する研究は簡約群の保型形式の場合に留まっており、非簡約群への拡張は、申請者の知る限り、ほとんど考えられてはいない。

## 研究計画

本研究では、古典的にも興味を持たれており、ジークル保型形式との関連も深いヤコビ群の保型形式 (ヤコビ形式) に関する Ichino–Ikeda 予想の類似を探求する。

$\mathbb{A}$  を有理数体  $\mathbb{Q}$  のアデル環とし、 $G_n = \left\{ g \in GL_{2n} \mid {}^t g \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ & \end{pmatrix} \right\}$  を  $n$  次の斜交群とする。また、ハイゼンベルグ群  $H_n$  を  $H_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$  に、演算を  $(u, v, t)(u', v', t') = \left( u + u', v + v', t + t' + \frac{{}^t u v' - {}^t v u'}{2} \right)$  で定めたものとする。 $G_n$  は  $H_n$  に自然に作用し、その作用により  $G_n$  と  $H_n$  の半直積群  $G_n^J$  を定める。特に  $G_n$  は  $G_n^J$  の部分群である。 $G_n^J$  を  $n$  次のヤコビ群と呼ぶ。 $G_n^J$  は中心  $\{(0, 0, t)\}$  を持つ。ヤコビ群  $G_n^J$  の保型形式  $\varphi$  は  $n$  次のヤコビ形式と呼ばれ、 $\varphi((0, 0, t)g) = \psi(t)\varphi(g)$  ( $t \in \mathbb{A}$ ) をみたく。ここで  $\psi$  は  $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$  の非自明な加法指標である。ヤコビ形式とジークル保型形式にはヘッケ作用素の理論があるため、以後ヤコビ形式  $\varphi$  とジークル保型形式  $f$  を考える際にはヘッケ作用素の同時固有関数 (ヘッケ固有形式) であると仮定してよい。 $n$  次のヤコビ形式  $\varphi$  の  $G_n$  への制限  $\varphi|_{G_n}$  は  $n$  次のジークル保型形式であり、 $\varphi|_{G_n}$  の成分として  $n$  次のジークル尖点形式  $f$  が現れるかどうかという問題は、ピーターソン内積  $\langle \varphi|_{G_n(\mathbb{A})}, f \rangle = \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash G_n(\mathbb{A})} \varphi(x) \overline{f(x)} dx$  (すなわち保型形式の周期) が非零かどうかという問題である。これを  $\varphi$  と  $f$  に関する保型  $L$ -関数の特殊値により判定できるであろう、というのが本研究の中で考えたい Gross–Prasad 予想の類似である。本研究ではより精密に、保型形式の周期  $\langle \varphi|_{G_n}, f \rangle$  と、 $\varphi$  と  $f$  に関する保型  $L$ -関数の特殊値の間の関係式を具体的に書き下すという Ichino–Ikeda 予想の類似を探求したい。