これまでの研究成果のまとめ

浜田 忠久

スツルム語の部分語グラフの遷移過程

最小の複雑さを持つ非周期的無限語として定義される**スツルム語 (列) (Sturmian words (sequences))** は, 多くの興味深い特性をもっており, 複数の異なる方法で定義することができる.

本研究では, ロジー (Rauzy) (1982) [2] によって導入された **部分語グラフ (factor graph)** を用いてスツルム語の性質を解明した. 部分語の長さに対する部分語グラフの遷移過程に主眼を置き, 部分語グラフの位数が 1 増えたときに, グラフの形状が変化する場合を詳細に検討した. ファレイ数列を使った分析を行ない, 無理数だけでなく有理数も含めた実数全体を対象とすることにより, 見通しを良くした. さらに, 安富 (1998)[3] , 秋山 (2021)[1] が導入した幾何学的マッピングを用いて器械語の特性を調べることにより, 器械語の包括的な理解が得られた.

本研究ではこの幾何学的マッピングに対して, α を固定したときの部分語グラフにおける中央道, 0 側道, 1 側道の区分が連続的に変化することに着目し, その 3 つの区分に対応して彩色を行なった.

もし α が ファレイ数列 $Farey_{n+1}$ のいずれかの分数 $\dfrac{p}{q}$ と一致すれば, 部分語グラフは q 個の頂点のループであり, 線分 $[0,1) \times \{1-\alpha\}$ は q 個に等分される. そうでなければ, 部分語グラフは, $Farey_{n+1}$ において α を挟むファレイ・ペアによって決定される.

この分割で得られたそれぞれの凸細胞に対し, 中央道, 0 側道, 1 側道のそれぞれを区別するための彩色を施すと, 位数 n の部分語グラフの形が α の値によってどのように変化するかが見て取れる.

主な結果は以下の通りである.

- 部分語グラフの対称性.
- 器械語の部分語グラフが, その傾き α と部分語グラフの位数 n, さらにファレイ数列 $Farey_{n+1}$ において α を挟むファレイ・ペアによって決定されること.
- 3 つの非負整数 $k \geq 1,\ l \geq 0,\ m \geq 0\ (l+m>0)$ が与えられたとき, 中央道, 0 側道, 1 側道のそれぞれに k 個, l 個, m 個の頂点をもつ部分語グラフが存在するための必要十分条件.
- 傾き α および切片 ρ により定まる器械語の長さ n の接頭語の部分語グラフにおける位置と α, ρ との関係.
- 器械語 $s_{\alpha,\rho}$ が長さ n の両分岐部分語を持つとき, $\alpha \in [0,1]$ の取りうる値の長さの総和とその漸近式, $(\rho,\alpha) \in [0,1) \times [0,1]$ の取りうる値の面積の総和とその漸近式, さらに, 部分語グラフの 3 つの道のそれぞれが幾何学的マッピングに占める面積およびその漸近式.

また, スツルム語やディオファントス近似で重要な役割を果たす three distance theorem の新しい証明を発見し, 部分語グラフの遷移過程についての論文と並行して投稿論文を執筆中である.

参考文献

[1] S. Akiyama, *Asymptotic formula for balanced words*, Journal of Number Theory, (2021).

[2] G. Rauzy. *Suites à termes dans un alphabet fini*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1982): 1-16.

[3] S. Yasutomi. *The continued fraction expansion of α with $\mu(\alpha) = 3$*, Acta Arith. **84** (1998): no. 4, 337-374.