

## 今後の研究計画

### 重さ半整数の newform とメタプレクティック群 $Mp(4)$ の local new vector

伊吹山予想の発展として newform について調べる。保型形式にはレベルという情報がある。そして、より小さいレベルの保型形式を newform と呼ぶ。次数 1 の場合は上田・山名による、志村五郎氏の結果における newform の研究がある。そこでこれに倣い、次数 2 の重さ半整数の保型形式についても伊吹山予想における newform の研究をしようと考えている。そして local new vector とは、保型表現の局所成分である局所体上の群の表現における、newform に対応するベクトルをいう。この課題では次数 2 の重さ半整数の newform や  $Mp(4)$  の表現の local new vector の存在と個数について調べる。

まず newform については、重さ整数のケースがよく知られているため、伊吹山予想のように重さ半整数の newform と重さ整数のそれらとの間の同型を構成することで結果を出す。これには上田・山名による次数 1 での先行研究がある。これを参考に予想を立て、私自身による伊吹山予想の証明[Is2]の手法を応用して証明をする。一方 local new vector については Roberts-Schmidt による次数 1 の場合の先行研究を次数 2 に拡張する。Roberts-Schmidt の研究では Waldspurger の結果を用いて  $Mp(2)$  の local new vector の存在と個数を調べているので、Waldspurger の一般化である Gan-Savin や Gan-市野の研究を用いて進める予定である。最後に、newform と local new vector の研究結果を比較・考察する。

保型表現の分野には「GGP 予想」という保型表現や局所体上の表現とその L 関数に関する重要な予想がある。その L 関数の計算には newform が有用で、どれくらいレベルの小さな newform や local new vector が存在するか、という情報には大きな価値がある。

### 伊吹山同型の発展

伊吹山同型とは、 $k$  が 3 以上の整数で  $j$  が非負の偶数のときにベクトル空間としての同型

$$S_{k-\frac{1}{2}j}^+(\Gamma_0(4), \psi) \cong S_{j+3, 2k-6}(\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}))$$

であって L 関数を保つものがあるという主張である。大まかにいえば、左辺は重さ半整数の Siegel 保型形式の空間で、右辺は重さ整数の Siegel 保型形式の空間である。ここで、 $k, j$  について『3 以上』や『非負』といった条件は必然的なものであり、これがないと片方が自明に零空間となる。一方、 $j$  が偶数という条件には明確な理由が知られておらず、なぜか  $j$  が奇数の場合には左辺が零、右辺が非零となる。しかし私は伊吹山同型の証明を通して、 $j$  が奇数のときに左辺に当てはまるべき他の対象が存在することを確信した。

論文[Is2]では、左辺の Siegel 保型形式に対応するメタプレクティック群  $Mp(4)$  の保型表現と、右辺の Siegel 保型形式に対応する特殊直交群  $SO(5)$  の保型表現を特定することでこの同型を証明した。その考察により、 $j$  が奇数のときに左辺に当てはまるべき  $Mp(4)$  の保型表現の存在を確認した。この保型表現を丁寧に調べ、保型形式に翻訳することで、 $j$  が奇数の場合にも類似の同型を構成する。