これまでの研究の概要

研究のテーマはポテンシャル論の応用としての多項式近似の理論である. 一般に, $\mathbb{R}$ 上の多項式は無限遠点の近くで正または負の無限大に発散するため, $\mathbb{R}$ 全体での関数の近似を扱うにあたっては不便を生ずる. そのため, 任意の非負の整数 n に対して $\lim_{|t|\to\infty} t^n w(t) = 0$ となるような適当な重み関数 w を乗じて考える必要がある. これに関して以下の問題が知られている.

"$1 \le p \le \infty$ とする. 重み w に対して $\mathbb{R}$ 上の関数 f が $fw \in L^p(\mathbb{R})$ をみたすとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{A}$$

となるような多項式の列 $\{P_n\}$ は存在するか?" この問をみたす多項式を具体的に求めることが研究の主題である. 本研究では重み w は滑らかな $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに属するものに限定して扱うものとする. 重み w を $w(t) = \exp(-Q(t))$ と表し, $T(t) := tQ'(t)/Q(t),\ (t \neq 0)$ と定義する. T の挙動によって $\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重みは 2 種類に分類され, T が有界のとき w を Freud 型と呼び, T が有界でないとき w を Erdős 型と呼ぶ. 本研究では Erdős 型を主にに扱う. これまでの研究で得られた結果は以下の通りである:

1. **de la Vallée Poussin 平均**: 関数 f の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ は $v_n(f)(t) := \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(t)$ によって定義される. ここで $s_m(f)(t)$ は f の重み w に関する直交多項式の Fourier 部分和である. f の近似度を $E_{p,n}(w;f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|(f-P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$ で定義する. ここで $\mathcal{P}_n$ は次数が高々n 次の多項式全体である. さらに $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ について或る $c > 0$ に対して $T(a_n) \le c\,(n/a_n)^{2/3}$ であることを仮定する. 記号 a_n とは MRS 数と呼ばれる w から導かれる量である. このとき定数 $C \ge 1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき以下が成り立つ:

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w;f). \tag{B}$$

   これまでに (B) の右辺が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する条件を示した. さらに f がより滑らかであれば $v_n(f)$ は f だけでなくその微分が f' に対しても近似を与えることも示した.

2. **Fourier 部分和**: 平均をとる前の Fourier 部分和 $s_n(f)$ の一様収束の条件も別に以下のように示している: w は $\mathcal{F}_\lambda(C^3+),\ (0 < \lambda < 3/2)$ という $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合を考える. f は連続かつ $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間上で有界変動とし, $\int_{\mathbb{R}} w(t)|df(t)| < \infty$ をみたすとき次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(f - s_n(f))wT^{-1/4}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

3. **Laguerre 型の重みに関する Lagrange の補間多項式**: $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ に関する解析についての結果である. ここでは重み $w = \exp(-R(x))$ は滑らかなクラス $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda(C^3+)$ に属するものとし, w_ρ を $w_\rho(x) := x^\rho w(x)\ (\rho > 0)$ と定める. $f \in C(\mathbb{R}^+)$, に対し $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ に関する Lagrange の補間多項式を $L^*_{n,\rho}(f)(x)$ とする. $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ は w_ρ に関する n 次の直交多項式の零点である. ここでは Lagrange の補間多項式が重み w_ρ に関して L^p ノルムで f に収束する条件を示した: $p = 2$ のとき, $\beta > 1/2$ として $(1+x)^{\beta/2+1/4}w_\rho(x)f(x) \to 0 (x\to\infty)$, また, $1 < p < 2$ のとき, $\beta > 1/p$ として $(1+x)^{\beta/2+1/4}T^{*1/2}(x)\Phi^{*-1/4}(x)w_{\rho^*}(x)f(x) \to 0 (x \to \infty)$ をみたすとき (ただし $\Phi^*(x) := (T^*(x)(1+R(x))^{2/3})^{-1}$)

$$\lim_{n\to\infty} \|(L^*_{n,\rho^*}(f) - f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} = 0. \tag{C}$$

   ただし, $L^*_{n,\rho^*}(f)$ とは重みを $w_{\rho*} := w_{\rho+1/2p-1/4}$ とした場合の Lagrange 補間多項式である. また, $2 < p$ の場合にも重み $\Phi^{*(1/2-1/p)^+}(x)w_\rho(x)$ に関して (C) に相当する結果が成立する条件を示した.

(伊藤　健太郎)