真鍋 征秀 (Masahide Manabe)

今後の研究計画

2 次元重力理論と位相的漸化式． 境界付きリーマン面のモジュライ空間は 2 次元重力理論や行列模型の数理構造を理解するために重要であり，その体積は様々な関係式を満たす．例えば，Weil-Petersson 体積は有名な Mirzakhani 漸化式だけでなく，Virasoro 束縛条件や Chekhov-Eynard-Orantin の CEO 位相的漸化式といった等価な関係も満たす．CEO 位相的漸化式は 2 次元重力が関係する幅広い理論に適用されるが，それに触発されて，2017 年に，Weil-Petersson 体積に対する Mirzakhani 漸化式の一般化が Andersen-Borot-Orantin により提案されて (以下，ABO 位相的漸化式とよぶ)，ほぼ同時期に Virasoro 束縛条件に対応するものの一般化が Kontsevich-Soibelman と Andersen-Borot-Chekhov-Orantin による量子エアリー構造として提案された．これらの一般化により，2 次元重力と関連する研究に対して，CEO 位相的漸化式を用いた 2 次元複素幾何学的アプローチ，ABO 位相的漸化式を用いた 2 次元幾何学的トポロジー的アプローチ，量子エアリー構造を用いた代数学的アプローチを考えることができるので，研究の地平が一気に広がる可能性がある．最近，私は大阪工業大学の藤博之氏と共同で，これら 3 つのアプローチを用いて，2 次元 $(2,p)$ ミニマル重力理論 (p は奇数) やその Masur-Veech 型ツイストの研究を進めている．ここで，$(2,p)$ ミニマル重力理論に対するモジュライ体積は $p\to\infty$ で Weil-Petersson 体積を与える一般化として理解できて，Masur-Veech 型ツイストは幾何学的トポロジー的アプローチで自然に理解されるリーマン面上の閉測地線の長さの統計量を与える．今後は，このようなアプローチの $(2,p)$ ミニマル重力理論以外への応用や，以下で述べる refinement (二重量子化) との関係も議論したい．

3 次元超対称ゲージ理論と結び目不変量． List of Publications [20] で我々は，3 次元球面 S^3 内の任意の結び目の colored Jones 多項式を 3 次元超対称ゲージ理論における K 理論的 vortex 分配関数として与えるようなアーベル型ゲージ理論 “knot-gauge theory” を構成した．ここで，その構成の為に，2015 年に Benini-Zaffaroni により超対称局所化の方法で得られた $S^2\times S^1$ 上の超対称ゲージ理論の A-twisted 分配関数 (twisted index) とその K 理論的 vortex 分配関数への “因子化” を用いた．knot-gauge theory は，“colored Jones 多項式 =K 理論的 vortex 分配関数” という関係を与え，この式の左辺は結び目の連続変形に対する位相幾何学的量子不変量を与える一方で，この式の右辺は vortex を数え上げる代数幾何学的数え上げ不変量と関係する．ただし，我々は上記の通り “因子化” の方法を用いて “間接的に” この右辺を与えたので，vortex モジュライ空間自体の “直接的な” 数学的構成は今後の研究で明らかにしたい．また，我々の knot-gauge theory は結び目に対するタングル図によりラベルされ，R 行列に対応する基本構成要素からなるので，結び目不変量を定義する Reidemeister move により非自明な変換を受けるが，その変換前後のゲージ理論的な関係も明らかにしたい．別の興味深い問題として，Jones 多項式の圏化を与える Dunfield-Gukov-Rasmussen による refinement のパラメータ t (homological grading) の R 行列への導入が考えられる．現在まで任意の結び目に対して，このような refinement を与える結び目不変量の系統的な計算方法は知られておらず，knot-gauge theory における，このパラメータ t の導入と合わせて本研究で明らかにしたい問題である．

非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論． 位相的弦理論は現状，摂動論的にしか満足な定義がされておらず，非摂動効果の取り入れは大きな問題である．この方向の研究として，例えば，局所 toric Calabi-Yau 3-fold 上の位相的弦理論の振幅 (Gromov-Witten 不変量) を与える CEO 位相的漸化式に非摂動的補正を加える方法が Eynard と Marino により提案されている．その他，精密化された (refined) 位相的弦理論 (位相的弦理論の 1 パラメータ変形) のある極限 (Nekrasov-Shatashvili 極限) が位相的弦理論の非摂動補正を与えるという議論もあり，Eynard-Marino との関係は興味深い問題である．ここで，精密化された位相的弦理論は上記の Jones 多項式の圏化とも関係があることが知られており，非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論について，その関係だけではなく，位相幾何学，代数幾何学，数え上げ幾何学のそれぞれの文脈で理解することも目指して研究を行いたい．さらに，位相的弦理論はブレイン (開弦の端点を束縛する境界で，ラグランジアン部分多様体を与える) を通して標的空間の量子化を与えるが，精密化された位相的弦理論のブレインは標的空間の “二重量子化” を与えると考えられる．この二重量子化と位相的弦理論の非摂動補正との関係や，二重量子化の意味での CEO 位相的漸化式の精密化の定式化も本研究で取り組みたい問題である．