(2) これまでの研究成果のまとめ 真瀬 真樹子

パート I. Seifert 形式と格子により極付けされた $K3$ 曲面について

この研究では $\mathbb{C}^3$ の準斉次孤立特異点の Seifert 形式と複素 $K3$ 曲面を極付けする格子との関係を考察した. 現在プレプリントの論文では, このような特異点の実 Seifert 形式を 佐伯の方法により計算し, その不変量を格子の不変量と比較した. 結果, それらの不変量の間に数値的関係式を得ることができた.

この論文の後半では, 重み付き $K3$ 曲面の極付けをする格子の特徴付けを行った. 結果, それらの格子の不変量を与えた一覧を作ることができた.

パート I. $K3$ 曲面上の点付き曲線の Weierstrass 半群について (米田二良氏との共同研究)

これまでの本研究の成果をまず復習したい. 次の問題を考察した:

問題: 半群 H, つまり, 群 $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cap \mathbb{N}$ の部分集合であり補集合 $\mathbb{N}_0 \backslash H$ が有限集合である群 H が与えられたとき, $K3$ 曲面上の点付き曲線 (C, P) であり, その Weierstrass 半群 $H(P)$ が H に一致するものを構成することができるか？

そして, 次の結果を得た: すなわち

(1) 次数 $4n$ の Fermat 型曲線 F_n を重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ 上に取る: $F_n : x^{4n} + y^{4n} + z^n = 0$. また, F_n 上の点を $P_n = (1:\zeta:0)$ とする. ただし, $\zeta^{4n} = -1$ である. 分岐因子と曲線 F_n との交わりの様子を調べることにより, 前像 $\widetilde{F_n}$ が $K3$ 曲面 S 上にあることが証明できる. 更に, 点 $\widetilde{P_n}$ の Weierstrass 半群が与えられた半群

$$H(\widetilde{P_n}) = \langle 2n,\, 8n-2,\, 12n-1 \rangle$$

に一致することが計算により確かめられる.

(2) 次数 $4n$ の次で定まる曲線 F_n を重み付き射影平面 $\mathbb{P}(1,1,4)$ 上に取る : $F_n : x^{4n-4}z + y^{4n} + z^n = 0$. また, F_n 上の点を $P = (1:0:0)$ とする. 分岐因子と曲線 F_n との交わりの様子を調べることにより, 前像 $\widetilde{F_n}$ が $K3$ 曲面 S 上にあることが証明できる. 更に, 点 $\widetilde{P_n}$ の Weierstrass 半群が与えられた半群

$$H(\widetilde{P}) = \left\langle \begin{array}{l} 8n-8,\, 8n-6,\, 8n-4,\, 8n-2,\, 8n, \\ 16n-5,\, 16n-3,\, 16n-1 \end{array} \right\rangle.$$

に一致することが計算により確かめられる.

更に最近の研究では, 与えられた数値的半群を持つ代数曲線であって, $K3$ 曲面上には存在しないものの分類に取り組んでいる.