今後の研究計画 --- 松下　泰雄

2023 年度申請

2023 年 1 月 6 日

　今後の研究計画の基本テーマは、やはり不定計量空間についてである。

2022 年度に得られた成果：

１．Kodaira-Thurston 4-manifold は，symplectic 4-manifold で，正定値 Kaehler 計量を許容しない初めての例として知られている．ところが，ニュートラル Kaehler 計量を許容することを示した．

２．Compact complex surfaces でニュートラルル Kaehler 計量を許容するもののうちの２つ，すなわち Complex torus および Primary Kodaira surfaces 上の計量は，実 4 次元多様体としては Walker 計量であることが示された．

　2023 年度に，上記の結果を含む成果を投稿論文にすることを第一の取り組事項とする．

現在取り組んでいる課題：

　1969 年に提唱された Goldberg 予想がある．それは，「コンパクト 概複素多様体が Einstein 計量を許容するならば，概複素構造は可積分となり複素構造になる」と主張するのである．Riemann 多様体では，スカラー曲率が非負ならば，Goldberg 予想が正しいことは，関川の定理（1985,1987）として確立している．

　申請者は，2007 年に 8 次元不定値計量の擬 Riemann 多様体で，コンパクト概複素多様体が Einstein 計量を許容しても，複素構造にならない概複素構造が存在する例を発見した。これが，擬 Riemann 多様体における初めての Goldberg 予想の反例となった。その後，6 次元擬 Riemann 多様体でも，Goldberg 予想の反例を発見できた。

　そして，４次元擬 Riemann 多様体においても，Goldberg 予想の反例が存在するかどうか，これが今取り組んでいる課題である．

　特に，任意の偶数次元 2n，任意の偶数指標(2n-2q,2q) の擬 Riemann 多様体の全てにおいて Goldberg 予想の反例の構成の可能性が見えてきた。今年度中に，プレプリントの作成に着手したいと考えている。(←更新部分です。これを削除して，黒にしてください。)

１．４次元多様体では、Riemann 曲率の Weyl 成分は対角化が可能であるが、ローレンツ計量における曲率は Petrov タイプに分類される。それは、構造群が SO(p,q) という擬回転群の性質を反映しているといえる。ところで、SO(p,q) の不変被覆群であるスピノール群 Spin(p,q) を構造群としてベクトル場をスピノール場としてとらえると、曲率テンソルの分類がさらに細かくなり、多様体の構造をより詳細に調べることができる。

２．したがって、いままで、SO(p,q)を構造群とする幾何学を主として研究してきたが、多様体の基本的性質から、スピノール群 Spin(p,q)を構造群とする幾何学を研究していきたい。
３．この方向で、すでに４次元 Walker 計量についてのスピノール解析による論文を３編発表している。これらは、Penrose の学生だった Peter R. Law との共同研究として行っている。
４．Walker 計量は、ヌルの平行平面場を許容するというある意味特殊な多様体であるが、その特殊性ゆえに様々な解析が可能となっているように思われる。実は、Walker 計量には第 I 種と第 II 種があるが、多くの研究結果はほとんどが第 I 種にたいしてのものである。現在、第 II 種に関しての新しい結果を見いだしつつあり、近々論文にまとめるところである。
５．これをきっかけに、第 I 種 Walker 計量とはかなり異質の第 II 種 Walker 計量の幾何学を探求したい。

６．不定計量空間における Goldberg 予想は，６次元以上では Walker 多様体によって反例を構成することができた。残るは４次元ニュートラル計量の不定計量空間に対して，Goldberg 予想が成立するかどうかを調べる予定である。４次元においても反例が存在するのではないかと予想を立てている。しかしながら，４次元は自由度が少なく他の高次元多様体と比べて，問題の困難さは比較にならない。やりがいのある問題である。

以上は、現在、すぐに取りかかろうとしている具体的研究計画であるが、不定計量空間の計量を対応する作用素に置き換えてみると、特にローレンの場合それは波動方程式となる。また、４次元ニュートラル計量に対しては、ウルトラ・ハイパーボリック方程式という Fritz John が研究してきた偏微分方程式となる。それで、これらの偏微分方程式の解と多様体の曲率との関係など、リーマン幾何における指標定理に対応するような、しかも多様体上の微分方程式を通じた物理との関係なども追求していきたい。

以　上