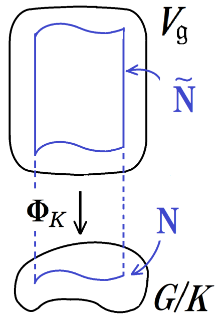
これまでの研究成果

森本 真弘

コンパクト対称空間 G/K 内の部分多様体を研究する 1 つの手法として，ある無限次元ヒルベルト空間への「持ち上げ」がある．$V_{\mathfrak{g}} := L^2([0,1],\mathfrak{g})$ で閉区間 $[0,1]$ から G のリー代数 $\mathfrak{g}$ への L^2 道全体の成すヒルベルト空間を表す．1995 年，C.-L. Terng と G. Thorbergsson は**平行移動写像**と呼ばれる自然なリーマン沈め込み $\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G/K$ を導入した．G/K の閉部分多様体 N に対し，逆像 $\tilde{N} := \Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の**固有フレドホルム (PF) 部分多様体**となり，特にその形作用素は自己共役なコンパクト作用素となる．$\tilde{N}$ は無限次元となるものの，$V_{\mathfrak{g}}$ の線形性からユークリッド空間内の手法が応用できる．彼らはその手法を用いて，G/K 内の部分多様体幾何学を研究した．一般に，N と $\tilde{N}$ の幾何学的関係を示すことは重要な問題である．



私は，N と $\tilde{N}$ の関係，特に極小部分多様体がもつ**対称性**に注目して研究を行った．

論文 [2] ではまず，N と $\tilde{N}$ の第二基本形式・形作用素の関係式を示し，更に $\tilde{N}$ が $V_{\mathfrak{g}}$ の全測地的 PF 部分多様体となる必要十分条件を示した．そして，2009 年に井川治氏，酒井高司氏，田崎博之氏らが導入した**弱鏡映部分多様体**という特殊な大域的対称性を持つ極小部分多様体（各法ベクトル ξ に対し，N を保ち ξ を (-1) 倍する等長変換が存在する部分多様体）の概念を，PF 部分多様体に対して定義・拡張した．その上で，平行移動写像 Φ_K の各ファイバーが，$V_{\mathfrak{g}}$ の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示した．更に，N が G/K の弱鏡映部分多様体ならば，$\tilde{N}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の弱鏡映 PF 部分多様体であることを示し，全測地的でない弱鏡映 PF 部分多様体の例を多数構成した．

論文 [3] ではまず，論文 [2] の形作用素公式を用いて，N が curvature-adapted 部分多様体であるという仮定の下で，N と $\tilde{N}$ の主曲率関係式を示した．これは，過去に小池直之教授が示した関係式の訂正および別証明にあたる．次に，本関係式を用いて，N と $\tilde{N}$ のオースティア性の関係を研究した．ここで部分多様体が**オースティア**であるとは，各法方向に対して主曲率全体のなす集合が (-1) 倍不変であることという．定義から「弱鏡映 $\Rightarrow$ オースティア $\Rightarrow$ 極小」という関係が成り立つ．$\tilde{N}$ の主曲率は一般に複雑であるが，私は G/K が球面の場合に，N のオースティア性と $\tilde{N}$ のオースティア性が同値であることを示した．更に，武富雄一郎氏が 2018 年に導入した**アリッド**という，弱鏡映のある種の一般化性質についても研究を行い，N がアリッドならば $\tilde{N}$ もアリッドであることを示した．以上の結果を用いて，オースティア PF 部分多様体の例や，オースティアでないアリッド PF 部分多様体の例を構成した．

論文 [4] では，論文 [2] で得られた結果を，G/K が（対称空間とは限らない）イソトロピー既約等質空間の場合へ拡張した．本結果は，私がアウクスブルク大学に滞在中に行った E. Heintze 教授，J. H. Eschenburg 教授，酒井高司教授との議論に基づく．

論文 [5] では，論文 [3] の拡張として，N が **Hermann 作用**の軌道である場合に，N と $\tilde{N}$ のオースティア性の関係を研究した．Hermann 作用とは，等長変換群内の対称部分群による作用として定義され，その作用は超極かつ各軌道は curvature-adapted 部分多様体となる．また，このとき $\tilde{N}$ はある path 群作用の軌道に一致する．私はまず，G/K 内の curvature-adapted 部分多様体に対してある種の階層を導入し，論文 [3] で得た主曲率関係式を精密化した．その公式を用いて，N が Hermann 作用の軌道である場合に，逆像 $\tilde{N}$ の主曲率明示公式を導出した．本公式は，C.-L. Terng, U. Pinkall, G. Thorbergsson, 小池直之教授らの結果を統合・一般化する有用な公式である．本公式を用いて，N が Hermann 作用の軌道である場合に，N がオースティアならば $\tilde{N}$ がオースティアであることを示し，更にその逆を否定する反例を示した．

論文 [6]（プレプリント）では，path 空間上のある自然な同型写像を導入し，[5] の結果を**シグマ作用**という等長作用の場合へ拡張した．更に，この同型を通して，PF 部分多様体の主曲率に関する既存の全ての計算結果（Terng, Pinkall-Thorbergsson, King-Terng, Koike）を統一理解できることを示した．更に，その同型が，**affine Kac-Moody 対称空間**と呼ばれる無限次元対称空間の間の自然な同型と対応することを示した．