今後の研究計画

森谷 駿二

1．多様体の中の結び目の空間　「これまでの研究成果」で述べたオペラッドと結び目の空間の関係は Goodwillie-Weiss の埋め込み解析 (埋め込み微積分) に基づいている．これは元は埋め込みの空間と配置空間の図式を関係づけるものであり，long knot 以外にもこの図式を用いて埋め込みの空間の研究がなされており，特にある程度一般の多様体の中の結び目の空間 $\mathrm{Emb}(S^1, M)$ の研究が何人かによって行われている．私は論文 1 において，$\mathrm{Emb}(S^1, M)$ のコホモロジー群に収束するスペクトル系列を構成した．同じものに収束する Sinha のスペクトル系列に比べて，E_2 項が明示的に表せるなどの利点がある．今後はこのスペクトル系列の高次の微分の計算をして行きたい．このスペクトル系列は，Poincaré 双対性のある定式化を用いて配置空間の図式を fat diagonal の図式に置き換えることによって得られた．fat diagonal は自然に Čech 複体を持つので，このスペクトル系列の元はある種のグラフと M の接球面束のコチェインの組み合わせで表せると思われる．この表示を用いて，高次の微分を計算し，$H^*(\mathrm{Emb}(S^1, M))$ の計算を進める．M の不変量との関連も調べたい．また，より基本的な $\mathbb{R}^n$ の中の long knot の場合にも類似の fat diagonal の図式を構成できる．Salvatore は標数 2 の場合小円オペラッドは形式的ではないことを小球オペラッドの組み合わせ的モデルを使って示したが "余次元 1 の long knot" の場合のこの図式を使って示すこともできる．他の標数についても同様の計算をすることによって (非) 形式性を研究したい．

2．配置空間のホモトピー型　多様体内の点の順序付配置空間のホモトピー型はその多様体のホモトピー不変量か？という問題は，多様体が単連結でないときは反例が知られているが，単連結のときは未解決である．近年，Campos-Willwacher と Idrissi によって配置空間の実ホモトピー型の不変性が配置空間の代数的モデルを構成することによって示された．その中で Poincaré dg 代数が本質的に使われた．これはその名の通り，微分や積と可換な Poincaré 双対性を持った dg 代数である．このようなものが取れるのは実係数 (または有理係数) 特有の事情であり，その他の標数の場合，Poincaré-dg 代数に相当する，"Poincaré E_∞-代数" というべきもので応用可能なものはまだ定式化されていないと思われる．問題は通常の特異チェインの Poincaé 双対性は積構造と相性が悪いことである．私が先のスペクトル系列の構成で用いた Poincaré 双対性のある定式化 (Atiyah 双対性とも呼ばれる) は積との相性が良いものであり，これを用いて正標数を含めて Poincaré 双対性込みの代数的モデルを構成したい．モデルを構成出来たら，それを用いて (超越的方法を用いずに) 配置空間の有理ホモトピー不変性を示せるか考察したい．有理係数で上手くいけば正標数の場合も考えたい．

3．非単連結有理ホモトピー論の幾何学的応用　有理ホモトピー論の重要なテーマの一つとして，compact Kähler 多様体のホモトピー型への制限があり，単連結の場合には Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan による結果があり，単連結でない場合にも Simpson や Katzarkov-Pantev-Toën による結果がある．Simpson の研究は基本群に制限を与えるものであり，Katzarkov-Pantev-Toën の結果は Simpson の非アーベル Hodge 理論を基により一般の schematic homotopy type と呼ばれるものに制限を与えている．ただし，Katzarkov らの結果は制限を与えるためにホモトピー型に強い仮定をつけており，一般の compact Kähler 多様体がこの仮定を満たすかは定かではない．応募者の非単連結有理ホモトピー論のモデルは不変量との関係が明確であり，さらに non-abelian Hodge 理論とも相性の良いものである．このモデルを用いて，ホモトピー型の制限について研究する．