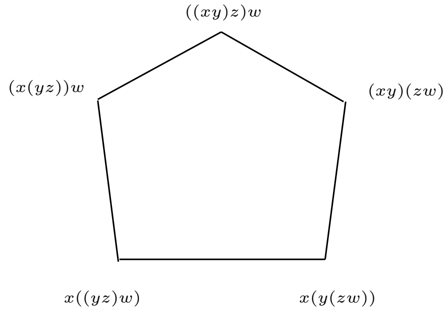
これまでの研究成果

森谷 駿二

私の研究は以下の二つの独立なテーマに分かれる．

1. 非単連結有理ホモトピー論 (論文 5,6)　1970 年代の Quillen，Sullivan による有理ホモトピー論は，単連結空間と可換微分次数付代数 (dg 代数) の 1 対 1 対応を与える．この対応によって，幾何の問題を代数の問題に置き換えて解くことができ，有理ホモトピー論は多くの幾何学的応用を持つ．Quillen-Sullivan の理論で最も強い仮定は「単連結」即ち基本群が自明という性質であった．(より正確にはもう少し一般の空間に対しても理論は成立するが，ここでは簡単のため省略する．) 私は，代数的モデルとして可換 dg 代数の代わりにテンソル dg 圏を用いることによって，有理ホモトピー論の対応をある条件を満たす非単連結な空間に拡張した．この一般化は Toën らによる Schematic homotopy type を参考にしたもので，実際 Schematic homotopy type とある意味で同値である．テンソル dg 圏をモデルとするこの理論には，二つの特徴がある．一つ目は，テンソル微分次数付圏は Simpson の非アーベル Hodge 理論に自然に現れるもので，この理論と相性が良いと期待されること．もう一つは Simpson の dg 圏に関する extension の概念を用いて，空間のホモトピー不変量 (基本群のホモトピー群への作用，Postnikov 不変量) を代数的モデル (特に極小モデル) から明示的に抽出できることである．また，元来の有理ホモトピー論では，応用上はある空間から幾何学的操作でえられる空間 (ループ空間など) の代数的モデルを元の空間のモデルから代数的に復元できることが重要であった．私はこのようなモデルの代数的復元の重要な例のうち，ループ空間とセルの貼り付けについて，(ある条件の下で) 非単連結の場合に拡張した．私の一般化は Goméz-Tato–Halperin–Tanré の一般化に比べ，基本群や高次のホモトピー群に制限がある一方，計算可能性に優れていると言える．

2. オペラッドと結び目の空間 (論文 1〜4)　博士課程修了後は，主にオペラッドの幾何学的応用，特に余次元の高い結び目のなす空間の不変量への応用を研究してきた．例えば結合律 $(xy)z = x(yz)$ がホモトピーを通してしか成り立たないような代数系 (ループ空間など) にはホモトピーのシステム (高次のホモトピー) が自然に付随する (右図参照)． 代数法則に付随する高次ホモトピーを扱う枠組みがオペラッドである．驚くべきことに，2000 年代ごろから，オペラッドと結び目の間に深い関係が発見されている．Lambrechts-Turchin-Volić は小球オペラッドを用いて余次元が 3 以上の場合の long knot の空間の有理コホモロジー群のグラフを用いた完全な組み合わせ論的表示を与えた．この結果は long knot の空間に関する Vassiliev の予想の有理係数，余次元 3 以上の場合に肯定的な解決を与えた．



私は論文 4 で Lambrechts らの主定理の証明の簡略化を与え，さらに彼らの結果の少し拡張して，余次元 3 以上の場合に long knot の空間のホモロジーに入る Gerstenhaber 代数構造についてもオペラッドの観点から組み合わせ論的表示を与えた．また，上記の Lambrechts らの証明の中で，小球オペラッドの形式性が本質的に使われている．私は論文 2 で次元が奇数で 5 以上の枠付き小球オペラッドが形式的でないことを証明した．また，論文 3(境圭一氏との共同研究) で $\mathbb{R}^3$ 内の long knot の空間の分類空間が，short rope という結び目類似の 1 次元の埋め込みの空間とホモトピー同値なるであろうという Mostovoy の予想を肯定的に解決した．また，論文 1 では多様体の中の結び目のなす空間のコホモロジーに関するスペクトル系列を構成し，計算例を示した．