これからの研究計画 中村徹也

スピノルの組を用いることで $\mathbf{H}^3$ 内のCMC 1 曲面、特には滑らかなエンドを持つものを研究をしていきたいと考えている。具体的には（1）曲面の構築　（2）可積分系の記述　（３）変分問題としての定式化　を計画している。

（１）曲面の構築

滑らかなエンドを持つCMC 1 球面のうち、エンド数と Willmore エネルギーがごく小さいものに関しては分類されたが、その他の球面の作るモジュライ空間に関してはまだ知られていない。特に滑らかなエンドを３つ持つ球面（トリノイド）に関しては、局所スピノルのエンドにおける極の次数が三角不等式を満たすことが必要であると分かっている。この条件の(不)十分性を示すことは興味ある課題である。トリノイドの内で二面体群 D_3 の対称性を持つものが存在すると予想され、さらに各エンドでの局所スピノルの指数を負数上変化させることで、滑らかなエンドを持つものを結ぶトリノイドの実数族が存在すると思われる。これはカテノイド・カズンのエンド数３の場合の類似例を与えることになる。

種数を１つ上げて滑らかなエンドを持つCMC 1 トーラスを構築することは、それ自体興味ある研究課題である。 [CSN01]は Costa-Hoffman-Meeks トーラスに対応するカズンの存在を示したが、その黙示的な方法のためエンドの滑らかさは論じられていない。スピノルの組を用いた顕在的な方法により、滑らかなエンドを持つカズンの存在が示されることが期待される。もうひとつの興味ある場合として、Hopf 微分形式が 0 でない定数になる例が挙げられる。この様なトーラスはもし存在すれば制限付き Willmore 曲面の例を与える（(３）参照)。さらにスピノルの Schwarz 微分が KdV 階層の楕円的有限差解の理論からくる Picard ポテンシャルと関係することが分かっている。

（２）可積分系の記述

スピノルを Hopf 微分の平方根で割って得られる組 $\frac{1}{\sqrt{Q}}\binom{P}{Q}$, $\frac{1}{\sqrt{Q}}\binom{p}{q}$ は夫々の Schwarz 微分をポテンシャルとする Hill 方程式を満たす。この方程式系の対称性を KdV 階層に似た可積分系として記述したい。実際 $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^4)$ が対称性を与えることが分かっているので、この群をより深く理解することが可積分系の存在を示す手がかりを与えるだろうと思う。他の手がかりとして、CMC 1 曲面に作用する Darboux 変換の存在がある。この変換をスピノルの組を用いて表現できれば、$\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^4)$ との関連性が明らかになり、可積分系も含めたより統一的な理解が期待される。

（３）変分問題としての定式化

$\mathbf{H}^3$ 内のCMC 1 曲面は制限付き Willmore (constrained Willmore) 曲面であるが、滑らかなエンドの極限点も含めて $\mathbb{R}^3$ 内の曲面として見たときは一般にはそうでない。これは Hopf 微分がエンドで極を持つ可能性があるためである [BPP08]。従って滑らかなエンドを持つCMC 1 曲面を Willmore エネルギーに対する変分問題の臨界点として理解するためには、点を固定した制限付き変分問題を考えなければならない。こうした定式化は興味ある研究課題であり、一般の Willmore 曲面の分類の一助となるだろうと思う。