これまでの研究成果　　中村徹也

私の研究は主として、３次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ にある定平均曲率(CMC)1の曲面についてである。$f\colon M \to \mathbf{H}^3$ をCMC 1 の共形はめこみとしたとき、Bryant [Bry87]による表現は正則写像 $\Phi\colon \widetilde{M} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ により $f = \Phi\,\Phi^\dagger$ として与えられる。ここに $\Phi^\dagger$ は転置複素共役行列を表し、$\mathbf{H}^3$ を行列式 1 で跡が正である 2×2 エルミット行列の集合として考えている。Φ は (1) $d\Phi$ は零点を持たない　(2) $\det(d\Phi)$ は常に 0　(3) Φは右側から SU(2) のモノドロミーをもつ の３条件を満たす。条件(1)及び(2)から、Φ を３次元の二次曲面への零曲線はめこみとみることができ、その観点から積分を含まない表現

$$\Phi = \frac{1}{S_{\binom{p}{q}} - S_{\binom{P}{Q}}} \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} P & \nabla P \\ q & \nabla q \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P & \nabla P \\ p & \nabla p \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} Q & \nabla Q \\ q & \nabla q \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & \nabla Q \\ p & \nabla p \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を得る[Nak22]。ここに $\binom{P}{Q}$ と $\binom{p}{q}$ はそれぞれ大域的、局所的スピノル(の組)とよばれるもので、Φ の Maurer-Cartan 微分を平方根に分解するものとして定義される。即ち

$$d\Phi\,\Phi^{-1} = \binom{P}{Q}\,(\,{-Q},\ P\,) \quad \text{かつ} \quad \Phi^{-1}d\Phi = \binom{p}{q}\,(\,{-q},\ p\,)$$

である。また $S_\bullet$ は夫々のスピノルの Schwarz 微分を表す。

今 $M = \Sigma \setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$ をリーマン面 Σ から有限点を除いたものとし、スピノル $\binom{P}{Q}, \binom{p}{q}$ がこれらの点で極をもつように Σ 上に拡張されしかも $\binom{P}{Q}$ の極の次数が 1 であるとき、対応する曲面はこれらの点で滑らかなエンドを持つ。滑らかなエンドとは、$\mathbf{H}^3$を Poincaré のモデルとして $\mathbb{R}^3$ 内の単位球として見たとき、はめこみ f が p_i へ $\mathbb{R}^3$ への滑らかなはめこみとして拡張されるものとして定義される [BP09]。

種々の幾何的量（Hopf 微分形式、双曲的ガウス写像、エンドの数、Willmore エネルギーなど）はスピノルを用いて端的に表すことができる。なかでもリーマン面 Σ がコンパクトで p_i がすべて滑らかなエンドのとき、大域的スピノルの総次数 $\sum_i \mathrm{ord}_{p_i}\binom{P}{Q}$ はエンドの総数の -1 倍になり、局所的スピノルの総次数 $\sum_i \mathrm{ord}_{p_i}\binom{p}{q}$ は Willmore エネルギーの -4π 倍になる。この形式化を用いることで、Willmore エネルギーが 16π までの滑らかなエンドを持つCMC 1 球面は分類されている [Nak22]。

滑らかなエンド数が 3 のCMC 1 球面に関しては、局所的スピノルのエンドにおける極の次数に対する必要条件が求められ、いくつかの例が構成された [Nak22]。但し、我々の形式化を用いてその条件の十分性を示すには至っていない。

$\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^4)$ 行列をスピノルによるベクトル $(P, Q, p, -q)^T$ に作用させ、適当なスカラー倍を施すことにより、新たなCMC 1 曲面のスピノルを得る。一般にはこうして得られた曲面は局所的にのみ定義されるが、滑らかなエンドを持つ球面への作用を考えた場合には再び（閉じた）球面を得る。このとき典型的な $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^4)$ 行列に対しては、新しい球面のエンドは再度滑らかとなり、しかも Willmore エネルギーは不変に保たれる。ひとつの例として、互いに双対なカテノイド・カズンを結ぶ周期的な変形が存在する。この例では複数の滑らかなエンドの収束・分裂が起こり、また多面体群の対称性が保たれるなど興味深い現象が観察される [Nak22]。