

今後の研究計画

我々はトリプレット W 代数と $N = 1$ スーパートリプレット W 代数の加群の圏の構造を研究してきた. 特に Feigin, Gainutdinov, Semikhatov, Tipunin により定義されたトリプレット W 代数 \mathcal{W}_{p_+, p_-} と Adamović と Milas により定義されたスーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ の加群の圏の構造を研究し, 単純加群の射影被覆の構造や非半単純なフュージョン則の詳細な構造を調べた. 定義は違うものの, トリプレット W 代数と $N = 1$ スーパートリプレット W 代数の間には深い結びつきがあることがこれまでの研究で分かっている. 今後も加群の圏の構造の研究を続け, これらの頂点作用素代数の間の関係を明らかにしていきたい. 以下, 今後の研究目標の詳細を述べる.

トリプレット W 代数 \mathcal{W}_{p_+, p_-} に関しては極小単純加群の射影被覆の構造や, ブレイド圏の構造の決定がまだできていない. これらの問題は Zhu 代数 $A(\mathcal{W}_{p_+, p_-})$ の構造が決定できていないことと \mathcal{W}_{p_+, p_-} 加群の圏がリジッドでないことに起因する. Zhu 代数 $A(\mathcal{W}_{p_+, p_-})$ に関しては最も簡単な $(p_+, p_-) = (2, 3)$ の場合は次元が 38 次元と求められているが [1], 一般の場合は決定されていない. 今後の研究では, まず $(p_+, p_-) = (2, 3)$, すなわち中心荷電が $c = 0$ の場合に, トリプレット W 代数 \mathcal{W}_{p_+, p_-} の極小単純加群の射影被覆の構造や, ブレイド圏の構造の決定を試みる. 中心荷電が $c = 0$ の場合は極小単純加群は一個であるので, Zhu 代数の次元定理と他の単純加群の射影被覆の構造を用いることにより, 極小単純加群の射影被覆の構造が一意的に決定できると推測される.

スーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ に関しては, これまでの研究で $\mathcal{SW}(m)$ の非半単純なフュージョン環が \mathcal{W}_p ($p = 2m + 1$) の非半単純なフュージョン環の特殊化で得られるという興味深い対応を得た. ここで非半単純なフュージョン環とは適当な直既約加群の集合上に定まる可換環のことである. Adamović と Milas はスーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ の単純加群の指標がトリプレット W 代数 \mathcal{W}_p の単純加群の指標を用いて表せるという結果 [2] を得ており, 我々の結果と彼らの結果から $\mathcal{W}_p\text{-mod}$ ($p = 2m + 1$) から $\mathcal{SW}(m)\text{-mod}$ へのブレイド圏の本質的全射が存在すると推測される. トリプレット W 代数 \mathcal{W}_p は隠れた sl_2 対称性を持ち自己同型群は $\text{Aut}(\mathcal{W}_p) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ となっている [3]. 我々は, スーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ にも \mathcal{W}_p のような隠れた対称性が存在すると期待しており, ブレイド圏の側面と頂点作用素代数の自己同型群の側面から二つのトリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ と \mathcal{W}_p の間の関係を明らかにしていきたい.

トリプレット W 代数 \mathcal{W}_p にはそのスーパー類似 $\mathcal{SW}(m)$ が定義できたように, トリプレット W 代数 \mathcal{W}_{p_+, p_-} に関するもそのスーパー類似である頂点作用素超代数 $\mathcal{SW}(p, q)$ が定義できる. これは Adamović と Milas により構成されたが [4], C_2 余有限性を満たすかどうかは未だに分かっておらず, 単純加群の分類も未解決である. 今後の研究ではスーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(p, q)$ が C_2 余有限性満たすことを示し, 単純加群の分類の分類を行う予定である. 単純加群の分類では admissible Jack 多項式の理論 [5] が重要になると考えられる.

References

- [1] D. Adamović and A. Milas, *Advances in Math* 227 (2011) 2425-2456.
- [2] D. Adamović and A. Milas, *Commun. Math. Phys.* **288** (2009), 225-270.
- [3] D. Adamović, X. Lin and A. Milas, *Commun. Contemp. Math.* 15(06), 1350028.
- [4] D. Adamović and A. Milas, *Selecta Math. (N.S.)* **15** (2009), 535-561.
- [5] O. Blondeau-Fournier, P. Mathieu, D. Ridout, S. Wood, *Advances in Mathematics* 314, 71-123.