これまでの研究成果

岡崎真也

3 次元球面 S^3 に埋め込まれたふたつのハンドル体を 2 成分ハンドル体絡み目と呼び, H で表す. ふたつの 2 成分ハンドル体絡み目が同値であるとは一方が他方に S^3 のアイソトピーでうつることをいう.

結び目理論において 2 成分絡み目の古典的かつ基本的な不変量として絡み数がある. 一方で (2 成分とは限らない) ハンドル体絡み目に対しては水澤氏によって linking numbers という不変量が導入されている. これは絡み数のハンドル体絡み目への一般化となっている. しかし linking numbers は絡み目の絡み数が満たしていた諸々の性質までは受け継いでいない.

Torres により 2 成分絡み目 L の 2 変数アレクサンダー多項式 $\Delta_L(t_1, t_2)$ の変数に 1 を代入すると 2 成分絡み目の絡み数が得られることが示されている. そこで私はこの性質が絡み数の本質的な性質であるという観点から 2 成分ハンドル体絡み目とそのホモロジー群の基底の組に対して絡み数を導入した.

2 成分ハンドル体絡み目 $H = h_1 \cup h_2$ に対して h_1 の種数を g_1, h_2 の種数を g_2 とする. $H_1(h_1)$ の基底となる向きづけられた単純閉曲線を $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1g_1}$, $H_1(h_2)$ の基底となる向きづけられた単純閉曲線を $c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2g_2}$ とする. $L_i = \sum_{j=1}^{g_2} lk(c_{1i}, c_{2j})$ $(i = 1, 2, \ldots, g_1)$ とする. 2 成分ハンドル体絡み目 H の絡み数 $lk(h_1, h_2)$ を $lk(h_1, h_2) = \gcd\{L_i | i = 1, 2, \ldots, g_1\}$ と定める.

2 成分ハンドル体絡み目 $H = h_1 \cup h_2$ に対して, h_1 のメリディアン系を $m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1g_1}$, h_2 のメリディアン系を $m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2g_2}$ とする. E を H の補空間とし, 全射準同型 $\alpha : \pi_1(E) \to \mathbb{Z} = \langle t | \ \rangle$ を $\alpha(m_{1i}) = 1$, $\alpha(m_{2j}) = t$ $(i = 1, 2, \ldots, g_1, j = 1, 2, \ldots, g_2)$ で定める. すると組 (H, α) に対してアレクサンダー多項式 $\Delta_{(H,\alpha)}(t)$ が定まる. このとき次が成り立つ.

定理 1 [O.]
$\Delta_{(H,\alpha)}(1) = lk(h_1, h_2)$.

Hoste により 2 成分絡み目 L のコンウェイ多項式 $\nabla_L(z)$ の最小次の項の係数が L の絡み数となることが示されている. 2 成分ハンドル体絡み目 H の絡み数 $lk(h_1, h_2)$ はこの性質も持っている.

定理 2 [O.]
$\nabla_{(H,\alpha)}(z)$ の最小次の項の係数は $lk(h_1, h_2)$ である.