これまでの研究成果のまとめ

大田武志

最近は、超対称性ゲージ理論と対応する行列模型の性質を研究して、以下のような成果を得た。

1. レベル1の楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が、2次元場の理論と5次元超対称ゲージ理論の対応において、ダイナミカルな対称性として、重要な役割を果たすことを議論した。楕円版の Frenkel-Kac 構成で、$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ 代数のレベル1の加群を構成することができる。変形パラメータ p のある1のベキ根極限において、パラフェルミオン系と自由ボソンが現れる。そして、2d/5d 対応は、パラ Viraosoro 対称性をもつ2次元のコセット CFT と $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_r$ 空間上の4次元 $\mathcal{N}=2$ $SU(2)$ ゲージ理論の間の対応に帰着する (Publication List の [37])。

2. Gross-Witten-Wadia 模型に対数ポテンシャルを加えて一般化したユニタリー行列模型が、$\mathcal{N}=2$ $SU(2)$ 超対称ゲージ理論で物質場の数が2の場合と密接に関連することを議論した。行列模型のスペクトル曲線とゲージ理論の Seiberg-Witten 曲線が同型であることを示した。行列模型の分配関数が Painlevé III 方程式のタウ関数であることを直交多項式の方法を用いて示した。この模型の二重スケーリング極限が、ゲージ理論側では Argyres-Douglas 超共形固定点への極限に対応することを明らかにした ([38,39,40])。

3. 上記2のゲージ理論/行列模型対応をより一般の場合に拡張した ([41])。それは、多重臨界ユニタリー行列模型と、$\hat{A}_{2k,2k}$ 理論とよばれる4次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論との対応である。われわれは、k 次多重臨界点でのユニタリー行列模型が、$\hat{A}_{2k,2k}$ 理論の (A_1, A_{4k-1}) Argyres-Douglas 固定点と対応することを示した。

4. 上記3で取り扱った多重臨界ユニタリー行列模型を、行列のサイズ N が大きい極限で、鞍点法を用いて詳しく調べた。固有値密度関数は、単位円周上にどのようにユニタリー行列の固有値が分布するかを示す関数である。鞍点方程式を解いて、固有値密度関数を求めた。ポテンシャルの形と密度関数から、この模型は3つの相をもつことを示した。強結合相が1つと弱結合相が2つ、合わせて3つである。強結合相では、円周上に間隙がない形で固有値が分布する。2つの弱結合相では、どちらの場合も、固有値が分布しない間隙が一つ円周上に現れる。固有値分布関数を用いて大きい N での自由エネルギーと Wilson ループの具体形を3つの相それぞれについて決定した。自由エネルギーを調べることで、強結合相と弱結合相の間の相転移は、3次相転移であることを明らかにした。また、片方の相転移点は、多重臨界点で、もう一方の相転移点は、通常臨界点であることも示した。多重臨界ユニタリー模型の摂動とその二重スケーリング極限も調べた ([42])。

5. A_{n-1} 型の β-変形クイバー行列模型において、分配関数のスケーリング極限を調べ、$su(n)$ 型の irregular ブロックの積分表示を得た。そして、対称性が最大となるパラメータ領域を調べ、行列模型のスペクトル曲線と Seiberg-Witten 曲線との対応を通じて、Argyres-Douglas 型の臨界面を定義する条件を得た ([43,44])。