

今後の研究計画

佐藤 敬志

Hessenberg 多様体とは、旗多様体の重要な subvariety であって、Lie 環の元と正ルート系の良い部分集合 (lower ideal と呼ばれる) という 2 つのデータにより定まるものである。Lie 環の元の性質により regular semisimple や regular nilpotent な Hessenberg 多様体というクラスが定められる。Regular nilpotent Hessenberg 多様体については、研究成果でも述べたように、そのコホモロジー環を明示的に決定することができた。Regular semisimple Hessenberg 多様体は、regular nilpotent の場合と異なり特異点を持つが、極大トーラスによる作用があり GKM 空間になっていて、固定点の同変コホモロジー環への制限写像が単射である。これにより同変コホモロジー環の計算が原理上は可能なのであるが、(同変) コホモロジー環の明示的な記述は知られていなかった。

現在、柘田幹也先生との共同研究として、regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環を研究している。研究成果の項目で述べたように 2 次でコホモロジー環が生成される場合の結果を得た。この研究のさらなる発展としてコホモロジー環が 4 次以下で生成される場合や 6 次以下で生成される場合などが考えられ、これを一般化することで regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の明示的な記述を与えたい。上で述べた共同研究での結果から類推すれば、lower ideal の poset としての構造がコホモロジー環を生成するために必要な次数を分かりやすく決定しているはずである。生成元と関係式を全て見つける必要があるが、次元が低い場合には計算機なども用いて見つけることができると考えている。また、2 次で生成される場合に得られている関係式を変形することで関係式の一部を得ることができるのではないかと考えている。

また、Hessenberg 多様体に関する別の研究対象として、 A 型の regular semisimple Hessenberg 多様体の Hessenberg twin と呼ばれる多様体がある。これらは $U(n)$ の極大トーラス T について左右どちらからの積を考えるかにより生まれる多様体であり、regular semisimple Hessenberg 多様体とその Hessenberg twin の同変コホモロジー環は同型である。この Hessenberg twin のコホモロジー環には、通常考えるものと別の対称群の作用があり、次数を忘れると正則表現になっている。次数に注目して、どの次数にどの既約表現が何度現れるかという問題を考えることができる。これは旗多様体の場合には解決されており、各 Young 盤に定まる組合せ論的な数により答えることができる。特にこれは Young 盤における箱のペアの数として得ることができ、これを A 型の Weyl 群のルートの数え上げとみなすことで自然に regular semisimple Hessenberg 多様体の Hessenberg twin の場合に拡張できるのではないかと考えている。

最初に述べたように regular semisimple Hessenberg 多様体は GKM 空間であり、各固定点に多項式を与えることでそのコホモロジー環の元を具体的に記述することができる。これを GKM 理論という。固定点の組合せ論的な性質が regular semisimple Hessenberg 多様体の幾何学的な構成と対応している点と、具体的な計算がしやすいという点で非常に有用である。一方、研究成果の項目で述べたように regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環を対称群の表現と見ると彩色対称関数で記述できるが、この表現を GKM 理論的に記述することで彩色対称関数のより幾何学的な見方を明らかにしたい。同様の問題は twin にも考えられて、LLT 多項式も幾何学的に理解したい。