これまでの研究成果のまとめ

佐藤 敬志

(1) 研究の動機

旗多様体など対称性の高い空間は、その**幾何的な性質が組合せ論的に記述できる**ことが多い。具体的な例としては、旗多様体の有理数係数コホモロジー環が鏡映群である Weyl 群の余不変式環となること、旗多様体の Bruhat 分解と Weyl 群の半順序構造、さらにはそのセルの次元と Weyl 群の元の長さの対応などである。様々な空間と組合せ論的対象において、そのメカニズムを明らかにしたいというのが私の研究の動機である。

(2) 研究成果

G を連結なコンパクト Lie 群とし、T をその極大トーラスとする。旗多様体 G/T には左からの積で T が作用する。G が F_4, E_6 型の時に、この T-作用に関する旗多様体の整係数同変コホモロジー環を、多項式環の商環として、イデアルの生成元を具体的に明示して、決定した。また、$\frac{1}{2}$ が存在する係数の場合の C 型の同変コホモロジー環の表示は既知だったが、整係数の場合のそれを決定した。これらの決定には、Bruhat 分解に基づいた同変コホモロジーの計算手法として GKM 理論と呼ばれるものを用いた。GKM 理論により、セルの貼り付け写像の情報をルート系の言葉で書くことが可能であった。組合せ論的構造を活かした計算手法により、環の表示に直観的で幾何学的な意味を与えることにも成功した。

また、旗多様体 G/T の subvariety として Hessenberg 多様体というものがある。G の正ルートの集合、つまり正ルート系を Φ^+ で表す。Hessenberg 多様体は、G の Lie 環の元と Φ^+ の “良い” 部分集合（これは lower ideal と呼ばれる）という 2 つのデータに対して定まるものである。ちなみに lower ideal が Φ^+ 自身の場合は、Hessenberg 多様体は旗多様体になる。Hessenberg 多様体は Springer 多様体などを含む重要な variety のクラスであることが知られていたが、私は Hessenberg 多様体のコホモロジー環の、多項式環の商環としての表示を決定した。より正確には、G の Lie 環の元が regular nilpotent であるときの Hessenberg 多様体のコホモロジー環を lower ideal の言葉で記述することに成功した。さらに、regular semisimple であるときの Hessenberg 多様体のコホモロジー環には Weyl 群の作用が存在し、この作用による不変式環が regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環に一致することを証明した。これは lower ideal が両者で同じ場合の話である。この研究により、lower ideal から得られる超平面配置の組合せ論が regular nilpotent Hessenberg 多様体の幾何として現れることが明らかになった。

また、A 型の regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環について、それが 2 次で生成されるときの lower ideal の特徴付けを与え、具体的な生成元と関係式を全て明らかにした。

A 型の regular semisimple Hessenberg 多様体に対し、その twin と呼ばれる滑らかな多様体が存在する。この twin のコホモロジーには対称群の作用が存在し、その作用の様子が対称関数論における重要な対称関数の 1 つである LLT 多項式というもので記述できることを示した。これは、regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーへの対称群の作用の様子が彩色対称関数と呼ばれるもので記述できるという既知の結果と対応しており、LLT 多項式に対応する幾何を見つけたという結果である。

また、Weyl 群の場合の対応する旗多様体の同変コホモロジー環のアナロジーとして、擬鏡映群の 2 重余不変式環というものがある。多重超平面配置から得られる組合せ論的代数を応用することで、各鏡映の言葉を用いて、多項式環の商環としてそれを記述した。