2023 年 1 月 5 日
関川　隆太郎

これまでの研究成果のまとめ

【研究の位置づけ】

代数的整数論、特に冪整基底問題を軸とした研究に取り組んでいます。特に与えられた代数体の冪整基底の存在性という古典的重要問題に取り組んできました。本研究は、代数体や代数体に付随する様々な不変量の研究にあたります。

【主要な研究業績】

冪整基底問題の先行研究で用いられる主な手法における主な問題点に、拡大次数の限界や適用条件があり、汎用性が高くないことがあります。そのため、冪整基底の研究の発展に向けて見通しを立てるには、まず多くの具体的結果を得る必要があると考えました。次数の大きさに依らずに定義できる巡回拡大の生成多項式に着目し、基本的な場合である 3 次巡回拡大から始め、奇素数次の巡回拡大の研究を行いました。

3 次巡回体の冪整基底の有無の特徴付け

生成多項式である Shanks 多項式の根の性質を用いて、3 次巡回体が冪整基底を持つための明示的な同値条件を明らかにしました。既存の研究と比較して、より明示的で判定がしやすい条件であるという強みがあります。冪整基底の研究では用いられていない単数群のコホモロジーを用いて証明したという特徴もあります。まとめた論文が以下の論文です。

1. T. Kashio, R. Sekigawa, The characterization of cyclic cubic fields with power integral bases, Kodai Math. J. 44 (2021), no. 2, 290-306.

冪整基底を持つ奇素数次巡回拡大の無限族の存在

Shanks 多項式の一般化にあたる陸名多項式の根の性質を活用して、冪整基底問題に取り組みました。大きく二つの結果があります。一つ目は、素数次巡回拡大が冪整基底をもつための明示的な十分条件を得たことです。この条件は拡大次数の大きさに依らないという汎用性を持っています。二つ目は、冪整基底をもつ素数次巡回拡大が各次数に対して無限個存在することを証明したことです。先行研究では冪整基底を持つ体は希少と考えられており、冪整基底と生成多項式を組み合わせたことで、画期的な結果が得られたと考えます。証明における特色として、基礎体が有理数体より大きいことで生じるイデアルの数え上げの問題に対して、新谷の基本領域を活用した評価の導入により、元の数え上げの問題へと帰着させたことが挙げられます。まとめた論文が以下の論文です。

2. R. Sekigawa, Rikuna's generic cyclic polynomial and the monogenity, J. Number Theory 231 (2022), 239-250.