高溝　史周

今後の研究計画

$\beta > 1$ とする。Frougny と Solomyak は次の 3 つの有限性条件を提議した。

$$(\mathrm{F}_1)\quad \mathbb{Z} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$
$$(\mathrm{PF})\quad \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$
$$(\mathrm{F})\quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$

ここに $\mathrm{Fin}(\beta)$ は $|x|$ が有限ベータ展開をもつような実数 x の全体とする。これまでに有限性条件に関する興味深い結果が知られている。それらをまとめると次のようになる。

	β のクラス	$\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造	(F)となるための条件	(PF)となるための条件
(F_1)	Pisot 数	?	?	?
(PF)	Pisot 数	和・積に関して閉	$d_\beta(1)$ が有限	―
(F)	Pisot 数	環	―	―

表からも分かるように(F_1)についてはよく分かっていない。しかし最近、私は(PF)を満たさないが (F_1) を満たす β の存在を発見した。そこで今後、(F_1)に関する性質について以下のテーマに取り組む所存である。

1. $(\mathbf{F}_1)$ の必要十分条件について

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ とし、$\mathbb{Z}^{d-1}$ 上の変換 τ_β を

$$\tau_\beta(l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) := \left(l_2, \cdots, l_{d-1}, -\left\lfloor l_1 a_0 \beta^{-1} + l_2(a_1\beta^{-1} + a_0\beta^{-2}) + \cdots + l_{d-1}(a_{d-2}\beta^{-1} + \cdots + a_0\beta^{-d+1})\right\rfloor\right)$$

と定義する。τ_β はベータ変換 T に対応する $\mathbb{Z}^{d-1}$ 上の変換である。また $\tau_\beta^*(\boldsymbol{l}) := -\tau_\beta(-\boldsymbol{l})$ とし、

$$Q_\beta := \left\{\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1} \middle| \exists \{\boldsymbol{l}_n\}_{n=1}^N \ s.t.\ \boldsymbol{l}_N = \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}_{n+1} \in \left\{\tau_\beta(\boldsymbol{l}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{l}_n)\right\} \ and \ \boldsymbol{l}_1 = (0, \cdots, 0, 1)\right\}$$

とおく。このとき、β が Pisot 数なら Q_β は有限集合となり、特に

$$P_\beta := \left\{\boldsymbol{l} \in Q_\beta \middle| \exists k > 0;\ \tau_\beta^k(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l}\right\}$$

も有限集合となる。私が最近発見した (F_1) の十分条件の証明においては、条件 $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ は重要な役割を果たしている。そこで現在、私は $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ が(PF)を満たさないが (F_1) を満たす β の必要十分条件ではないかと予想しており、今後はこの予想の解決に向けて研究を続けるつもりである。

2. $\boldsymbol{\beta}$ が $(\mathbf{F}_1)$ を満たすときの $\mathbf{Fin}(\boldsymbol{\beta})$ の代数構造について

(PF)の逆の包含の成立は明らかである。同様に(F)も逆の包含が成り立つ。したがって、(PF)と(F)はその定義から $\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造が既に明らかになっている。一方、(F_1) においては $\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造が明らかになっていない。そこで、β が (F_1) を満たすときの $\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造に関しても研究を進める予定である。