高溝　史周

これまでの研究成果のまとめ

$\beta > 1$ とする。y の整数部分を $[y]$、小数部分を $\{y\}$ で表し、$T: [0,1] \to [0,1)$ を $T(x) = \{\beta x\}$ と定義する。このとき $x \in [0,1)$ に対し $c_n = [\beta T^{n-1}(x)]$ とおくことで x のベータ展開

$$x = c_1\beta^{-1} + c_2\beta^{-2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta^{-n}$$

を得る。これを $d_\beta(x) = c_1c_2\cdots$ と表す。他方、$x \geq 1$ に対するベータ展開は

$$x = c_1\beta^{L(x)-1} + c_2\beta^{L(x)-2} + \cdots + c_{L(x)-1}\beta + c_{L(x)} + c_{L+1}\beta^{-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\beta^{L(x)-n}$$

$$L(x) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x\beta^{-n} < 1\}, \qquad d_\beta\left(\beta^{-L(x)}x\right) = c_1c_2\cdots$$

によって定義される。ベータ展開で末尾が 0 のみとなるとき、x は有限ベータ展開を持つという。今後、$|x|$ が有限ベータ展開を持つような実数 x の全体を $\mathrm{Fin}(\beta)$ と表す。

任意の正整数は有限な 10 進展開をもつ。Frougny と Solomyak はこの有限性条件の一般化として、次の β に関する 3 つの条件を考えた。

$$(\mathrm{F}_1)\ \ \mathbb{Z} \subset \mathrm{Fin}(\beta) \qquad (\mathrm{PF})\ \ \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta) \qquad (\mathrm{F})\ \ \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fim}(\beta)$$

(1) **有限ベータ展開とオドメーター**（査読付き論文リスト[1]）

私は吉田雅通氏との共同研究において β に付随するオドメーターを導入し、オドメーターの全射性及び単射性がそれぞれ(F)、(PF)と同値になることを示した。さらに β が代数的整数の場合にオドメーターの導出過程を有限オートマトンで記述し、β が(F)を満たすこととオドメーターの計算可能性が同値になることを証明した。

(2) **有限性条件を満たす 3 次の Pisot 数のいくつかのクラスについて**（査読付き論文リスト[2]）

Akiyama は(F)を満たす 3 次の Pisot 単数を特徴づけた。さらに Akiyama は Brounotte らとの共同研究で、set of witnesses という集合を利用することで(F)の十分条件を与えるアルゴリズムを考案した。一方、私は上述のオドメーターを記述する有限オートマトンを利用して、Akiyama の 3 次の Pisot 単数の特徴づけの拡張を得、さらにそれが手計算の範囲で判定できることを証明した。またその証明の中で、set of witnesses より厳密に小さい集合によって（F）を判定できるクラスが存在することも発見し、同時に Akiyama らの手法では(F)か否か判定できなかったクラスで(F)を満たすものを発見した。

(3) **自然数の有限ベータ展開について**（論文執筆中）

(F_1) を満たす β は Pisot 数になることが知られていたが、(F_1) についてはそれ以上のことは知られていなかった。本研究では与えられた Pisot 数が (F_1) を満たすことを確認する方法を発見し、それを利用してこれまで未解決であった(PF)を満たさないが (F_1) を満たす β の存在を証明した。