# 今後の研究計画

線形スケイン理論を軸に様々なリー代数から構成される量子不変量の結び目図式を用いた計算を中心に結び目の tail の研究や、スケイン代数に関する研究を行う。

**■結び目の tail に関する研究** 結び目の tail の存在は、結び目の色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式の族に対する係数の安定性に言い換えられる。Garoufalidis-Lê (2015) において、alternating な結び目の色付き $\mathfrak{sl}_2$ ジョーンズ多項式が任意の非負整数 $k$ に対して第 $k$ 番目の安定性を持ち、第 $k$ 番目の tail が得られることが示された。結び目の tail と呼ばれていたものは、ここでいう第 0 番目の tail である。

これらの背景をもとに高次の単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して、結び目の色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式の具体的な計算を通した第 $k$ 番目の tail に関する研究を行う。現在、$(2,m)$-トーラス結び目に関しては計算機を用いることで、Garoufalidis-Lê (2015) で定義されている $k$ 番目の係数の安定性よりも精密な安定性を確認している。さらに、第 $k$ 番目の tail が、ある $k_0$ から $q$-級数ではなく $q$-多項式になる現象も確認している。このような現象がどのような絡み目のクラスで起きるのか、そもそも第 $k$ 番目の tail が存在するのかという問題を研究する。さらに、これらの安定性の背景には Garoufalidis-Lê (2005) によって示された量子 $\mathfrak{g}$ 不変量の $q$-ホロノミー性があると考えている。よって、具体例で第 $k$ 番目の tail の計算や現象、性質の証明を行いながら、理論的な背景として $q$-ホロノミー性との関係を調べる。

また、$\mathfrak{sl}_2$ の場合と同様に具体的な tail の明示式から $\mathfrak{g}$ に対応する (false) theta series が得られると考えられる。この明示式を与えることで、色付きジョーンズ多項式と量子モジュラー形式との関係や、(false) theta function の Andrews-Gordon 型の恒等式を得る研究も行う。

**■スケイン代数に関する研究** ランク 2 の単純リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4, \mathfrak{g}_2$ の場合をはじめとする高次のリー代数に対応するスケイン代数の代数的性質を結び目図式を用いた計算を軸に研究する。そして、スケイン代数と曲面の量子クラスター代数や量子タイヒミュラー空間との関係を明らかにすることで曲面の平坦 $G$ 接続のモジュライ空間の幾何への応用を考える。これらの研究は主に石橋典氏や狩野隼輔氏と共同で進める予定である。

これまでの石橋典氏との共同研究で $\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ の場合にクラスター代数におけるクラスターに対応するスケイン代数の元の集合を与えることで対応を作ってきた。実際には、曲面 $\Sigma$ に対してその量子クラスター代数を $\mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$、量子 upper クラスター代数を $\mathscr{U}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$、 スケイン代数を $\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$、その境界弧による局所化 $\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}[\partial^{-1}]$ としたときに、スケイン代数の商体 $\mathrm{Frac}\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$ の中に $\mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$ を構成した上で

$$\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}[\partial^{-1}] \subset \mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma} \subset \mathscr{U}^q_{\mathfrak{g},\Sigma} \subset \mathrm{Frac}\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$$

を示した。$\mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ に対して上の左 2 つの包含関係において等号が成り立つかを調べる。$\mathfrak{g}_2$ や $\mathfrak{sl}_n$ の場合に関しては、まず上記のスケイン代数とクラスター代数の埋め込みが構成できるかを研究する。

また、上記の対応を研究していく中でスケイン代数の元を量子 upper クラスター代数へと展開する手法もわかってきた。この展開の詳細を見ることで展開係数の positivity を証明する。

スケイン代数に関しては、曲面の写像類群の表現の研究も行う。曲面の写像類群は自然に曲面のスケイン代数に作用する。そして $q$ を 1 の冪根に取ることによって、この作用が写像類群の TQFT 表現を与えることが知られている。今回の研究で高次のリー代数に付随するスケイン代数の性質が明らかとなり、さらにクラスター代数や高次タイヒミュラー空間との関係がわかることによって、写像類群の高次のリー代数における TQFT 表現の研究が進められると考えている。そして、この写像類群の量子表現から新しい三次元多様体の量子不変量を発見できるのではないかと期待している。