これまでの研究成果のまとめ

これまで結び目図式を用いた量子不変量の具体的計算や、曲面上の結び目の量子不変量がなす空間であるスケイン代数の研究を中心に結び目と他分野の数学的対象との関係を研究してきた。特に、$\mathfrak{sl}_2$ 以外の高次の単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子 $\mathfrak{g}$ 不変量の結び目図式を用いた計算を用いた研究を行っている。主な研究は、結び目の量子不変量と q-級数に関連する研究と、スケイン代数とクラスター代数に関連する研究の二つに分けられる。

■結び目の tail と q-級数の研究について　結び目 K の量子 $(\mathfrak{sl}_2, V_{n+1})$ 不変量である色付きジョーンズ多項式 $J_K(n)$ は非負整数 n でパラメトライズされる。ここで、V_{n+1} は $\mathfrak{sl}_2$ の $(n+1)$ 次元既約表現を表している。この q-多項式の族について K が adequate であるときには Armond (2013) が、K が alternating であるときには Garoufalidis-Lê (2015) がそれぞれ独立に係数の安定性を示した。この係数の安定性から色付きジョーンズ多項式の族の極限 $\lim_{n\to\infty} J_K(n)$ の存在が示される。この極限は q-級数で与えられ、結び目 K の *tail* と呼ばれる。

私はこれまでの研究で $\mathfrak{g}$ が rank 2 の単純リー代数の場合に色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式の tail について研究してきた。この場合、結び目の量子 $\mathfrak{g}$ 不変量である色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式は非負整数のペアでパラメトライズされるが、特に片側が 0 である "一行色付き" の場合について研究を行っている。$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ の場合には $(2, m)$-トーラス絡み目などの一行色付き $\mathfrak{g}$ ジョーンズ多項式の明示式を与え tail を明示的に求めた。($\mathfrak{sl}_3$ については [a1, a2, a4]、$\mathfrak{sp}_4$ については準備中 [c2]。) これらの q-級数は (false) theta series と呼ばれる量子モジュラー形式の一種を与えている。さらに $\mathfrak{sl}_3$ の場合は二通りの tail の明示式を用いて (false) theta series に関する Andrews-Gordon type の恒等式を得た。

■曲面のスケイン代数と量子クラスター代数の研究について　曲面のスケイン代数は、$\mathfrak{g}$ の基本表現で色付けされた曲面上の結び目図式のなす加群にスケイン関係式を定めることで定義される。積構造は曲面上の図の重ね合わせによって自然に定まる。$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合のスケイン代数（カウフマンブラケットスケイン代数）は曲面の平坦 $SL_2(\mathbb{C})$ 接続のモジュライ空間の関数環の量子化と関係することが知られている。一方で、より一般的なクラスの代数群 G における曲面の平坦 G 接続のモジュライ空間に対してクラスター座標を用いることでクラスター代数が得られる。そして、その量子化の手法も知られている。これらの研究から曲面 Σ に対してその量子クラスター代数を $\mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$、スケイン代数を $\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$ としたときに、$\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}[\partial^{-1}] = \mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$ という予想を立てて、その解決を目標としている。また、様々な種類のクラスター代数やスケイン代数に関しても対応関係を研究している。石橋典氏との共著論文 [a5] では Kuperberg によって定義された $\mathfrak{sl}_3$-スケイン関係式を点付き境界を持つ曲面に拡張し、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ で $\mathscr{S}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}[\partial^{-1}] \subset \mathscr{A}^q_{\mathfrak{g},\Sigma}$ を証明した。さらに、結び目図式を用いた計算を使うことで $\mathfrak{sl}_3$-スケイン代数の elevation-preserving というクラスの元に対して量子 Laurent positivity を証明した。この他にも石橋典氏との共同研究 [b6] で $\mathfrak{sp}_4$ の場合に同様の定理を示した。さらに、[c3] では $\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sp}_4$ において、状態付きスケイン代数と呼ばれる端点に "state" を持つ異なるタイプのスケイン代数の reduced 版と境界孤を局所化した点付き境界を持つ曲面の曲面のスケイン代数が同型である事を示した。この共同研究では同型写像とその逆写像を明示的に与えており、Lê–Yu (2020) で $\mathfrak{sl}_2$ の場合に局所化の普遍性を用いて証明された同型より具体的な対応を与えるものとなっている。また、石橋典氏と狩野隼輔氏との共同研究 [c1] では $\mathfrak{sl}_2$ の場合に壁付き曲面のスケイン代数という新しい対象を定義して、それと曲面上のラミネーションから定義される係数付きのクラスター代数との対応関係を調べた。この他にも、[c4] で $\mathfrak{sp}_4$-スケイン代数を通して $\mathfrak{sp}_4$-lanimation の intersection coordinate について調べている。