今後の研究計画

綾野孝則

私は，2022 年の論文において，種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 2 の射が存在するとき，種数 2 の Abel 関数を Weierstrass の楕円関数で明示的に表示しました．[Shaska 2001] では，種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 3 の射が存在するとき，種数 2 の超楕円曲線と楕円曲線の定義方程式が決定されています．[Shaska, Wijesiri, Wolf, Woodland 2008] では，種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 4 の射が存在するとき，種数 2 の超楕円曲線と楕円曲線の定義方程式も決定されています．私は，これらの条件の下で，種数 2 の Abel 関数を Weierstrass の楕円関数で明示的に表示します．$f(x)$ を x の d 次の多項式，$\mathcal{X}$ を $y^2 = f(x^2)$ で定義される超楕円曲線とします．$\mathcal{X}_1$ を $y^2 = f(x)$ で定義される超楕円曲線，$\mathcal{X}_2$ を $y^2 = xf(x)$ で定義される超楕円曲線とします．このとき，$\mathcal{X}$ の Jacobi 多様体は，$\mathcal{X}_1$ の Jacobi 多様体と $\mathcal{X}_2$ の Jacobi 多様体の直積と同種であることが知られています．私は，$\mathcal{X}$ に付随する Abel 関数を $\mathcal{X}_1$ 及び $\mathcal{X}_2$ に付随する Abel 関数で表示します．Abel 関数は KdV 方程式や KP 方程式を満たすことが知られています ([Buchstaber, Enolski, and Leykin 1997], [Matsutani 2001])．また，DNA の超らせん形状を表現する際にも Abel 関数は重要であることが知られています（[Matsutani 1998, 2001]）．種数 2 以上の Abel 関数については，楕円関数ほど多くのことは分かっていません．Abel 関数を楕円関数で表示できれば，Abel 関数の具体的な数値を Mathematica などを用いて計算できるようになります．私は，Abel 関数の抽象的な一般論だけではなく，Abel 関数の具体的な数値を追うということを目標に研究を行っています．これにより，情報科学や数理物理などに具体的な応用が期待できるものと考えています．

$F(x)$ を x の $2g+2$ 次の多項式，V を $y^2 = F(x)$ で定義される種数 g の超楕円曲線とします．α を $F(\alpha) = 0$ を満たす複素数とします．$1 \le i \le g$ に対して，V 上の正則微分形式 $\omega_i = \frac{x^{i-1}}{y}dx$ を考えます．$\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ とします．V 上の g 個の点 $\{P_i\}_{i=1}^{g}$ に対して，

$$u = \sum_{i=1}^{g} \int_{(\alpha,0)}^{P_i} \omega$$

とします．このとき，P_i の座標を u から表示します (偶数次の多項式で定義される超楕円曲線に対する Jacobi の逆問題)．また，この逆問題の解を与える関数が満たす微分方程式を導出します．この問題は種数 $g = 1$ の場合は，解析学の名著 Whittaker and Watson, A Course of Modern Analysis の中で解かれています．私はこの結果を種数 $g \ge 2$ の場合に拡張します．数理物理などにおいて，偶数次の多項式で定義される超楕円曲線は頻繁に現れます．奇数次だけでなく，偶数次の多項式で定義される超楕円曲線に対しても，Abel 関数の理論を整備しておくことは意味があると考えています．

私は，2019 年の論文において，種数 $g = 2, 3$ の超楕円曲線に対して，$\mathbb{C}^g$ 全体ではなく，シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出しました．これは，KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています．種数 g の超楕円曲線のシグマ関数の零点集合は，Abel–Jacobi 写像による $g-1$ 個の点の像と一致します．今後は，2019 年の論文の結果を拡張し，一般の種数 g の超楕円曲線に対して，Abel–Jacobi 写像による $k(<g)$ 個の点の像の上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出します．これは KdV 方程式を $2g-2k$ 個のパラメータで変形した偏微分方程式になると考えています．