これまでの研究成果

綾野孝則

Weierstrass により定義され，詳しく調べられた楕円シグマ関数 $\sigma(u)$ や楕円関数 $\wp(u)$ は物理，工学，情報科学などの様々な分野に応用されています．これらの関数は楕円曲線と相互に関連します．100 年程前に，Klein, Baker 等によって，超楕円曲線に付随する多変数のシグマ関数および Abel 関数 (楕円関数を多変数に拡張した関数) の具体的な理論が構築されました．1990 年代に，Buchstaber, Enolski, Leykin 等により，超楕円曲線を含む (n,s) 曲線と呼ばれる平面曲線に対するシグマ関数を用いた Abel 関数の理論が構築されました．私は，2014 年と 2016 年の論文において，この (n,s) 曲線の理論を，情報科学の符号理論で取り扱われているテレスコピック曲線と呼ばれるより一般的な代数曲線の族まで拡張しました．テレスコピック曲線は (n,s) 曲線を含んでいます．この結果は Abel 関数の研究に大きな進展を与えたと考えています．

種数 g の超楕円曲線に付随する Abel 関数は $\mathbb{C}^g$ 上で $2g$ 個の周期を持つ有理型関数です．この関数は KdV 方程式を満たすことが知られています．私は，2017 年と 2019 年の論文において，種数 3 の超楕円曲線に対して，$\mathbb{C}^3$ 全体ではなく，シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^3$ 上の有理型関数という新しいクラスの関数を考察し，この関数で解が書ける可積分方程式を導出しました (Buchstaber 氏との共同研究)．これは，KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています．

19 世紀に，Jacobi, Bolza などの多くの研究者により，楕円積分に変換できる超楕円積分の様々な例が与えられました．この問題は，split Jacobian などの問題と密接に関連し，数論や代数幾何において活発に研究が行われています．また，この知識は，次世代暗号として注目されている同種写像暗号にも応用されています．私の研究の目的は，この知識を応用し，Abel 関数を楕円関数で表示することです．[Enolski and Salerno 1996] では，種数 2 の超楕円曲線から楕円曲線への次数 2 の射が存在するとき，種数 2 の Abel 関数が Jacobi の楕円関数で表示されています．私は，2022 年の論文において，同じ条件の下で，種数 2 の Abel 関数を Weierstrass の楕円関数で表示しました (Buchstaber 氏との共同研究)．可積分系において，種数の高い Abel 関数で微分方程式の解が書けたとき，その解をより種数の低い Abel 関数で表示できるかという問題に関心が集まっています．暗号理論においても，種数の高い代数曲線に関する計算を種数の低い代数曲線に関する計算に帰着させることに関心が集まっています．私の研究結果は，可積分系や暗号理論などにおいて，今後具体的な応用が期待されるものと考えています．

シグマ関数のべき級数展開の係数を求めるという問題は古くから研究されています．シグマ関数の満たす熱方程式を用いる方法，シグマ関数の代数的表示公式を用いる方法，シグマ関数のタウ関数による表示を用いる方法などが提案されています．大西氏により，(n,s) 曲線に付随するシグマ関数の展開係数は，曲線の定義方程式の係数と $\frac{1}{2}$ により $\mathbb{Z}$ 上生成される環に含まれることが示されています．私はこの結果をテレスコピック曲線に拡張しました．この結果を論文にまとめ，数学の雑誌に投稿しています．

複素関数論において，多変数の有理型関数を 2 つの有理型関数の積に分解するという問題は，重要な問題です．種数 2 の超楕円積分の逆問題の解を与える 2 変数の有理型関数が，松谷氏と Grant により独立に提案されています．この 2 つの関数は $\mathbb{C}^2$ 全体では一致しませんが，シグマ関数の零点集合上では一致します．よって，これらの関数の差はシグマ関数と有理型関数の積に分解できることが期待されます．私はこの分解を明示的に記述しました．この結果を論文にまとめ，数学の雑誌に投稿しています．