今後の研究計画

藤原英徳、

指数型可解リー群 G のユニタリ表現を研究していると、冪零リー群とのギャップはやはり大きい。例えば、リー環の双対ベクトル空間の 1 点における２つの Pukanszky 条件を満たす極大等方部分群 A, B から単項表現を誘導するとそれらはユニタリ同値である。調和解析における具体的な問題を考えていると、これら２つの実現の間の相関作用素の具体的な形を知りたいことがある。形式的な作用素はすぐに思いつくが、問題はそこに現れる積分の収束性である。一つの十分条件は単純な積集合 AB が G の閉部分集合となることである。私は長年この問題に取り組んでいて最近その証明にたどり着いたと思っています。まずはこの証明を再検討し完成させたい。現在取り組んでいる問題です。

冪零リー群 G の調和解析において非常に有用な道具としてカシミール元があります。これはリー環の普遍包絡環の元で G の既約ユニタリ表現に対しスカラー作用素を与えるものです。Corwin-Greenleaf は G の余随伴軌道の状況に応じてカシミール元の存在を示しました。この結果を指数型可解リー群に拡張できるか否かを研究してみたいと思います。このカシミール元の存在が示せれば、単項表現に伴う不変微分作用素環 D(G/H) の構造の研究にとても有用であると思われます。例えば D(G/H) の中心が G のリー環の双対ベクトル空間のある部分アフィン空間上の H-不変多項式環のポアソン中心に同型かという Duflo の問題なども扱えるであろうと思われます。

より詳しく述べてみたいと思います。G をリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ指数型可解リー群、$f \in g^*$、H をリー環 $\mathfrak{h}$ をもつ G の連結閉部分群で $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = \{0\}$ を満たすものとし、H のユニタリ指標 $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$ から誘導して G の単項表現 τ を作る。更に $\Gamma = f + h^{\perp}$ とおく。このとき、もし τ が離散型の重複度をもてば Plancherel 公式が記述でき、環 D(G/H) は可換であることが示されます。ではこの状況で D(G/H) は Γ 上の H-不変多項式環に同型であろうか。これらの問題を τ に対する Plancherel 公式を用いて研究したい。そのためにはカシミール元の存在が大いに望まれます。ただこの場合 τ の既約分解における重複度の有限性とはもはや同値でないことがわかっています。