今後の研究計画

星野 浄生

2024 年 1 月 15 日

乱関数に関する微積分に関し, 以下の研究を行う.

(1) Ogawa 積分可能性

[5] では, 適当な Skorokhod 積分過程 X の Brown 運動 B に関する Ogawa 積分 $\int_0^t X(s)\,d_\varphi B_s$ が, 各 $t \in [0, L]$ に対して収束することを示した. この収束は, 因果的な場合は $t \in [0, L]$ に関して一様である (従って X は正則可積分と呼ばれる条件を満たす) ことが [7] で分かっていて, 正則可積分な乱関数で定まる確率積分方程式の解の一意存在性が [8] で与えられている. そこで, 一般の場合に, X の正則可積分性を調べる. また, [6, Theorem 7.3] で示された Nualart-Pardoux-Stratonovich 積分 (NPS 積分) 可能な乱関数の Ogawa 積分可能性や, 時間パラメータ t の空間 $[0, L]$ を一般化した場合の Ogawa 積分可能性についても調べる.

(2) 確率積分の Riemann 近似

正則化 Riemann 和 $R_\Delta(X; Y)$ (X, Y は乱関数, Δ は $[0, T]$ の重み付き分割) を導入し, R_Δ に基づく以下の 2 性質を持つ確率積分 $I_\alpha(X; Y) = \int X d_\alpha Y$ (α は区間 $[0, T]$ から $[0, 1]$ への可測関数) を構成した ([3]).

(a) Y が Brown 運動 B で $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合, I_α は正則 CONS に関する Ogawa 積分や NPS 積分を近似する.

(b) Y が連続 semi-martingale で $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合, I_α は Y に関する Fisk-Stratonovich 積分を近似する.

さらに, Y を Brown 運動としたとき, Ogawa 積分を定義する CONS φ に関して「全ての Brownian quasi-martingale が φ-可積分であること」と「φ が正則であること」が同値であるという Ogawa 積分に関する基本的事実が [7] で示されているが, その類比として, Y を連続 quasi-martingale としたとき,「全ての quasi-martingale に対し I_α が存在する」ための重み付き分割 Δ に関する必要十分条件を与えた.

Ogawa 積分は Brown 運動に関して定義される一方, [3] で与えた積分 I_α は quasi-martingale に関して定義され, (a) の意味で正則基底に関する Ogawa 積分を含む積分となる. そこで, [9] で与えられているような Ogawa 積分に関する積分可能性やその応用に関する事実と同様の事が, (連続或いは不連続な) quasi-martingale に関する積分 I_α に関しても言えるかという問題を研究する.

(3) 確率微分可能性, 乱関数の SFC による同定

「これまでの研究成果のまとめ」の (3) に記載した, 2 次変分 $[\,]$ と 2 次変分をもつ乱関数 V に関する確率微分 $\frac{d}{dV}$ が存在する乱関数のクラス

$$Q(V) = \left\{ X : \text{乱関数} \;\middle|\; [X],\ \frac{dX}{dV} \text{ が存在し, } \frac{d[X]}{d[V]} = \left|\frac{dX}{dV}\right|^2 \right\}$$

は線形空間をなす事を [4] で示したが, 次に, $Q(V)$ が環となっているかを調べたり, 2 次変分をもつ乱関数の線形空間で $Q(V)$ よりも広いものを与える事を目指す. また, 2 次変分をもつ乱関数 V, W に対して, $X \in Q(V), Y \in Q(W)$ である場合の $X + Y, XY$ の確率微分や 2 次変分の計算公式を与える. 一方, Ogawa 積分や (2) の確率積分 I_α に基づく確率微分公式を与え, それらの積分過程が $Q(V)$ に属すことを示す. また, この研究の乱関数の SFC による同定問題への応用を試みる.

参考文献

[1] K. Hoshino, Identification of random functions from the SFCs defined by the Ogawa integral regarding regular CONSs (Probability Symposium), RIMS Kôkyûroku. **2116**, 95-104, (2019).

[2] K. Hoshino, Stochastic differentiability, Ogawa integrability and identification from SFCs of random functions, doctoral thesis, Osaka prefecture university, (2020)

[3] K. Hoshino, On a Riemann approximation of the stochastic integral, MSJ Spring Meeting, abstract, (2020).

[4] K. Hoshino, On the stochastic differentiability of noncausal processes with respect to the process with quadratic variation, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 95. **8**, pp 1446-1473, (2023).

[5] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Ogawa integrability of noncausal Wiener functionals, Stochastics. Vol. 91. **5**, 773-796, (2019).

[6] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Th. Rel. Fields, 78, pp.535-581, (1988).

[7] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals, Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240, (1985).

[8] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation, Stochastics. Vol. 85. **2**, 286-294, (2013).

[9] S. Ogawa, Noncausal Stochastic Calculus. Springer, (2017).