

# これまでの研究の概要

研究のテーマはポテンシャル論の応用としての多項式近似の理論である. 一般に,  $\mathbb{R}$  上の多項式は無遠点の近くで正または負の無限大に発散するため,  $\mathbb{R}$  全体での関数の近似を扱うにあたっては不便を生ずる. そのため, 任意の非負の整数  $n$  に対して  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^n w(t) = 0$  となるような適当な重み関数  $w$  を乗じて考える必要がある. これに関して以下の問題が知られている.

“ $1 \leq p \leq \infty$  とする. 重み  $w$  に対して  $\mathbb{R}$  上の関数  $f$  が  $fw \in L^p(\mathbb{R})$  をみたすとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad (\text{A})$$

となるような多項式の列  $\{P_n\}$  は存在するか?” この問をみたす多項式を具体的に求めることが研究の主題である. 本研究では重み  $w$  は滑らかな  $\mathcal{F}(C^2+)$  と呼ばれるクラスに属するものに限定して扱うものとする. 重み  $w$  を  $w(t) = \exp(-Q(t))$  と表し,  $T(t) := tQ'(t)/Q(t)$ , ( $t \neq 0$ ) と定義する.  $T$  の挙動によって  $\mathcal{F}(C^2+)$  に属する重みは 2 種類に分類され,  $T$  が有界のとき  $w$  を Freud 型と呼び,  $T$  が有界でないとき  $w$  を Erdős 型と呼ぶ. 本研究では Erdős 型を主に扱う. これまでの研究で得られた結果は以下の通りである:

1. **de la Vallée Poussin 平均:** 関数  $f$  の de la Vallée Poussin 平均  $v_n(f)$  は  $v_n(f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(t)$  によって定義される. ここで  $s_m(f)(t)$  は  $f$  の重み  $w$  に関する直交多項式の Fourier 部分和である.  $f$  の近似度を  $E_{p,n}(w; f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$  で定義する. ここで  $\mathcal{P}_n$  は次数が高々  $n$  次の多項式全体である. さらに  $w \in \mathcal{F}(C^2+)$  について或る  $c > 0$  に対して  $T(a_n) \leq c(n/a_n)^{2/3}$  であることを仮定する. 記号  $a_n$  とは MRS 数と呼ばれる  $w$  から導かれる量である. このとき定数  $C \geq 1$  が存在して任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $fw \in L^p(\mathbb{R})$  のとき以下が成り立つ:

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \quad (\text{B})$$

これまでに (B) の右辺が  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する条件を示した. さらに  $f$  がより滑らかであれば  $v_n(f)$  は  $f$  だけでなくその微分が  $f'$  に対しても近似を与えることも示した.

2. **Fourier 部分和:** 平均をとる前の Fourier 部分和  $s_n(f)$  の一様収束の条件も別に以下のように示している:  $w$  は  $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ , ( $0 < \lambda < 3/2$ ) という  $w \in \mathcal{F}(C^2+)$  のより滑らかな部分集合を考える.  $f$  は連続かつ  $\mathbb{R}$  の任意の有界閉区間上で有界変動とし,  $\int_{\mathbb{R}} w(t)|df(t)| < \infty$  をみたすとき次が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (f - s_n(f))wT^{-1/4} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

3. **Laguerre 型の重みに関する Lagrange の補間多項式:**  $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$  に関する解析についての結果である. ここでは重み  $w = \exp(-R(x))$  は滑らかなクラス  $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda(C^3+)$  に属するものとし,  $w_\rho$  を  $w_\rho(x) := x^\rho w(x)$  ( $\rho > 0$ ) と定める.  $f \in C(\mathbb{R}^+)$ , に対し  $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$  に関する Lagrange の補間多項式を  $L_{n,\rho}^*(f)(x)$  とする.  $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$  は  $w_\rho$  に関する  $n$  次の直交多項式の零点である. ここでは Lagrange の補間多項式が重み  $w_\rho$  に関して  $L^p$  ノルムで  $f$  に収束する条件を示した:  $p = 2$  のとき,  $\beta > 1/2$  として  $(1+x)^{\beta/2+1/4}w_\rho(x)f(x) \rightarrow 0(x \rightarrow \infty)$ , また,  $1 < p < 2$  のとき,  $\beta > 1/p$  として  $(1+x)^{\beta/2+1/4}T^{*1/2}(x)\Phi^{*-1/4}(x)w_{\rho^*}(x)f(x) \rightarrow 0(x \rightarrow \infty)$  をみたすとき (ただし  $\Phi^*(x) := (T^*(x)(1+R(x))^{2/3})^{-1}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_{n,\rho^*}^*(f) - f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} = 0. \quad (\text{C})$$

ただし,  $L_{n,\rho^*}^*(f)$  とは重みを  $w_{\rho^*} := w_{\rho+1/2p-1/4}$  とした場合の Lagrange 補間多項式である. また,  $2 < p$  の場合にも重み  $\Phi^{*(1/2-1/p)^+}(x)w_\rho(x)$  に関して (C) に相当する結果が成立する条件を示した.