今後の研究計画

甲斐　大貴

Applebaum 及び Mohari は近年，正規直交枠束上の確率微分方程式に対する適切な仮定のもとで，コンパクト Riemann 多様体上の Lévy 過程は対称 Markov 過程となることを明らかにした．また，多様体がコンパクトでない場合についても，Lévy 過程が対称 Markov 過程となることが強く期待できる見通しが立っている．このような状況を踏まえ，今後の研究では次の課題を解決することを目指す．

課題 1 Riemann 多様体上の Lévy 過程の熱核に対する評価を，曲率の情報が反映された形で求める．

課題 2 Riemann 多様体の曲率と Lévy 過程の再帰性，過渡性及び保存性の関係を調べる．

課題 3 Lévy 過程が再帰的であれば invariant measure 及び invariant measure への収束オーダー（大偏差原理）を調べ，過渡的であれば無限遠への escape rate を求める．

以下，これらの課題の意義と研究方法を述べる．

課題 1 の意義と研究方法

課題 1 が解決すれば Riemann 多様体の曲率が Lévy 過程にどのような影響を及ぼしているかが明らかになる．また，Lévy 過程の熱核の評価は課題 2 及び 3 を調べる有効な手段となる．この課題はまず，非コンパクト Riemann 多様体上の Lévy 過程が対称 Markov 過程となる条件を調べ，対称 Markov 過程となる条件下で Riemann 多様体上の Lévy 過程の性質をディリクレ形式を使って解析を行う．ディリクレ形式によるジャンプ過程の熱核の評価方法は Chen-Kim-Kumagai(2009) などで行われているので，課題 1 はこの結果を応用することで解決できると期待できる．

課題 2 の意義と研究方法

これまでの私の研究 (Kai2024) で，Cartan-Hadamard 多様体上の Lévy 過程が過渡的，保存的であることを明らかにしたが，逆に Riemann 多様体にどのような計量が入っていれば Lévy 過程が再帰的になるかという問題は未解決となっている．これまでの研究の補完をするために，本研究課題を設定した．この課題は，Lévy 過程の熱核 $p(t,x,y)$ の時間 t に関する積分 $\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ の収束及び発散を確認すれば良い．課題 1 を解決できれば，熱核 $p(t,x,y)$ を曲率の情報を使って評価できるので $\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ が収束，発散する条件を求めることが出来る．

課題 3 の意義と研究方法

課題 2 が解決すれば，Lévy 過程が定常状態を持つ多様体の条件が分かる．Lévy 過程 $\{X_t;\ 0 \le t < \infty\}$ の経験分布 $\frac{1}{T}\int_0^T \delta_{X_t}(\ \cdot\ )dt$ に対する Donsker-Varadhan 型の大偏差原理を求めることで，一様でない空間では Lévy 過程がどれくらいの速度で定常状態となるかを把握することができる．ただし，$\delta_{X_t}(\ \cdot\ )$ は Riemann 多様体上の Dirac 測度である．Euclid 空間上の対称な Lévy 過程（α-安定過程）の大偏差原理は Takeda-Tsuchida(2011) でディリクレ形式を通して導かれている．この結果を一般化し，Riemann 多様体上の Lévy 過程に拡張することが出来ればこの研究課題を解決することができると考えられる．また，Lévy 過程が過渡的となる場合は，Lévy 過程の動径方向の評価を行うことで，ジャンプ拡散過程が無限遠点に向かう速度（escape rate）を求めることができる．実際，断面曲率が負の定数でピンチされた Cartan-Hadamard 多様体上の Lévy 過程の escape rate は Kai(2024) によって分かっている．本研究課題の解決によってこの結果をさらに一般化することを目指す．