研究計画書

2024 年 1 月 28 日　菅野 仁子

結び目理論を学び始めたころ, 結び目の不変量であるアレキサンダー多項式は, とても魅力的だと思った. だから, 当時の指導教官と 3 次元多様体の不変量として拡大アレキサンダー行列を定義することができたときはうれしかった [論文リストの 16]. その後, この不変量が実際に役に立つことが, 基本群では区別できない二つのレンズ空間が, この拡大アレキサンダー行列を使えば同相でないことが証明できるという結果が出版された. 私はレンズ空間以外にもこのような 3 次元多様体の例がないか, 探ってみたいと思って居る. トポロジーにおける 40 年の発展は目覚ましく, 新しい概念や不変量もたくさんわかってきている. このような新しい方法を使うと拡大アレキサンダー行列は, どんな意味を持ちどんな発展が可能なのか興味がある. また, 河内明夫先生から「拡大アレキサンダー行列は, 今までに定義されている不変量に関係するような気がする. 新しい不変量を見つけたと思っても, 大概すでにあるものと表現が違うだけというのは良くあることだから, 注意すべきだ. 」というコメントをいただいたのを記憶している. 貴重なコメントへの返事は, 未だにされていないのでこの機会に是非これに取り組みたいと思って居る.

トポロジーに気持ちを残しつつ, 自分の手で検証しやすいグラフ理論を始めた. そこで学んだのは, グラフ理論を研究する人達の中には, トポロジーを受け入れない人もいるということだ. 分からないと言われてしまえばそれまでだが, 理解してもらえるよう努めるのが私の使命の一つかもしれないと思う. 初めにトポロジーに対する抵抗があるのかもしれないと感じたのは, 私の博士論文の最後の部分に出てくる平面的 4 正則グラフに対するスプリッター定理の部分である. スプリッター定理とは, ある性質を持つグラフの族に対して, グラフ同志の部分順序としてある包含関係を仮定したとき, その族内のどんな二つのグラフに対しても, その族内に大きい方のグラフから小さい方のグラフに対して順序列が存在し列内どの二つのグラフもその包含関係を保ったままその族内で変形していける有限個のグラフ作用素が存在することを保証する定理である. 3 正則グラフに対しては, グラフマイナーという包含関係を使うので. トポロジーに変化がなく, 素直に受け入れられた. ところが, 4 正則グラフで使ったイマーションマイナーというのは, トポロジーが変化する, 例えば, 平面的なグラフが非平面的なグラフを含むということがあり予想以上に理解を得るのが難しかった. 時間に余裕ができた今, この難しい課題に取り組みたい [論文リストの 9].

最後に, 同僚と始めたばかりの研究がある. それは, カウフマンの三変数多項式に関するものである. カウフマンの多項式は, ジョーンズ多項式の情報も含むので重要なことは分かっているが, 使い方が必ずしも容易ではない. そして, 多項式そのものは, 結び目図の不変量ではあるが, 結び目そのものの不変量ではない. 結び目不変量にするには, 整多項式環に含まれるライデマイスター変形に対応するイデアルで割った商環の元を対応させる必要がある. こういったイデアルに対しては, ほとんど研究がなされていないので, 私たちは, 体を係数にもつ多項式環であれば存在したであろうグレブナー基底を計算することから始めている. 今後どういった方向に研究が進むのかは未定である.