これまでの研究成果

菅野仁子

令和 6 年 1 月 28 日

私はまず，グラフ理論の分野で書いた学位論文［論文リストの 15］の延長線上にあると思われる研究をしました．ある性質を持つグラフから成るクラスに対して，生成定理を証明するということは，そのクラスに属するどんなグラフも，いくつかのそのクラス内の極小グラフから，ある局所的なグラフ作用素によってそのクラス内で，構築出来ることを示すことですが，その途中経過についての情報は全く得られません．それに対して，スプリッター定理では，ある包含関係を持つクラスに対して，このクラスに属するどんなグラフの組(H, G)に対しても，包含関係が成り立つ限り，ある局所的なグラフ作用素が存在し，その包含関係を保ったまま，大きなグラフから小さいグラフまで縮小できることを保証します．それで，その逆をたどれば，小さいグラフから大きなグラフが構築できるというわけです．このように，スプリッター定理は，生成定理より強いのです．私は，三正則グラフではグラフマイナーを，四正則グラフでは，イマーションを包含関係としてスプリッター定理を証明しました．また，四正則の場合に，大きいグラフは平面的という条件を入れると，たとえ小さいグラフが平面的であってもイマーションが平面的でないと無限個のグラフ作用素が必要になる例も，構築しました．五正則［論文リストの 12,13］や平面的五角形分割［論文リストの 4］に対しては，生成定理タイプのものだけ証明しました．

次に私は，決定するのが難しいとされるグラフの不変量のうち，本空間への埋め込みで決定されるグラフのページ数(本の厚み)に挑戦しました．本空間は，$\mathbb{R}^3$の中に Z 軸を背表紙（スパイン）とし，Z 軸を境界とするいくつかの 2 次元半平面をそれぞれのページとして実現できます．そのとき，グラフ G の不変量 bt(G)を，すべての頂点は Z 軸に，各辺は半平面の開集合内に，しかも他の辺とは交差せずに埋め込むとき必要とされる最小ページ数として定義します．私は，有向グラフ D に対して，各ページで埋め込まれる辺の向き付けが Z 軸に対して常にプラス方向だけ，あるいはマイナス方向だけになるように制限をつけたときの有向ページ数 obt(D)を定義し，それぞれのページ数に対して，臨界になる有向グラフをページ数が小さい場合について決定しました．あるグラフ D が k-臨界であるとは，obt(D) = k であるが，その任意の真部分有向グラフについてはページ数が減少するとします［論文リストの 7］．

その頃，数論におけるダイナミクスの過程を，有向グラフで表し，周期性を持つ直前の状態を，pre-periodic と呼んでいることを知りました．数を有向グラフ，関数をライングラフ作用素で置き換えることができることに気が付きました．初めに手にした論文では，連結な有向グラフだけを扱っていて，pre-periodic な場合は除外されていました．その後，1970 年代に非連結なグラフも含めて，詳しい研究がなされていたことがわかりましたが，pre-periodic な部分は，「記述が面倒になるだけであまり実りがない」と，ありました．私たちは，そこが一番面白いと思ったのと，現存するこの分野の論文には，もっと近代的に改訂できる余地があると判断して，執筆をはじめて継続中です［論文リストの 1］．