これまでの研究成果のまとめ

片山 拓弥

私は幾何学的群論の研究を続けてきました．幾何学的群論とは，群に語距離と呼ばれる距離を導入し，幾何学的手法を用いて群の代数的性質や空間としての幾何学的性質を研究する分野です．私は特に right-angled Artin 群（RAAG）から様々な群への単射準同型と，その応用について，位相幾何学やグラフ理論を使いながら考察しています．ここで RAAG は有限無向グラフの頂点を生成元とし，辺に対応する頂点の組の交換子を関係式とする群です．

(1) RAAG の埋め込みについて

私は 3 次元球面内の結び目の補空間の基本群に埋め込まれる RAAG を決定しました [論文 1]．結び目の補空間は，JSJ 分解によって理解しやすい小さな 3 次元多様体に分解されます．この JSJ 分解を用いて一般的な問題を特殊なケースの問題に帰着することにより，上記の結果を得ました．また，私は RAAG の間の単射準同型についても論じています．線形森の補グラフの RAAG から勝手な RAAG への単射準同型を，2 つの RAAG の定義グラフの間のフルな単射準同型に還元しました [論文 2, 3]．そしてこの結果を応用することで，道グラフの補グラフの RAAG から有向曲面の写像類群への単射準同型が存在するための必要十分条件を与えることができました [論文 6]．

(2) 曲面の写像類群について

久野恵理香氏 (大阪大学) との共同研究において，私たちは (1) の結果を応用し，braid 群の有限指数部分群である pure braid 群から有向曲面の写像類群への単射準同型が存在するための必要十分条件を与えました [論文 7]．また, 少数の例外を除き，向き付け不可能曲面の向き付け可能二重被覆は写像類群の間の単射準同型 $(*)$ を誘導することが知られています．一方，Koberda は RAAG から有向曲面の写像類群への単射準同型の構成法を与えています．上の $(*)$ と Koberda の結果を組み合わせることにより，私たちは RAAG から向き付け不可能曲面の写像類群への単射準同型の構成法を与えました [論文 4]．さらに準双曲的群の理論を使って，上記の $(*)$ が擬等長埋め込みであることを示しました [論文 5]．また [論文 5] では，曲面の包含写像が誘導する写像類群の間の単射準同型は擬等長埋め込みである，という Hamenstädt の定理の別証明を与えています．

(3) 曲面の曲線複体について

私は曲面の写像類群に関する Masur–Minsky 理論をより精密に理解することを目指して，曲線複体の研究を行っています．2023 年に曲線複体の距離に関する Hempel の不等式の改良と，bounded geodesic image theorem の定数の計算を行いました．現在，この内容に関する論文を準備中です．