今後の研究計画　　　　河井　公大朗

G_2-dDT 接続を用いた数え上げ不変量の構成を目指したい。私は、G_2-dDT 接続の場合はより深い結果が得られるのではと予想している。その理由としては、(i)（より正確には）G_2-dDT 接続は「グラフ的」な calibrated 部分多様体に対応しており、特異集合の扱いが容易と思われるため。(ii)[論文 15, 16] から、calibrated 部分多様体や G_2-instanton の場合より G_2-dDT 接続のモジュライ空間は性質が良さそうなため。(iii) 類似の dHYM 接続の場合にはかなり研究が進んでおり、calibrated 部分多様体より深い結果も出ているため。

[研究 1] 極小接続に対するコンパクト性定理

不変量の構成には、モジュライ空間をコンパクト化し、その性質を深く調べる必要がある。そのためにはまず極小接続のコンパクト性定理を考える必要がある。

「(i) Price の単調性定理」の類似は [論文 22] で示したが、また結果がもう少し強くできるのではないかと考えている。実際 G_2-dDT 接続に限ると、より強い主張を導くことができた。どの程度まで強くできるか、例などをもとに考察したい。また単調性定理と「体積」V の（何らかの意味での）拡大縮小変換との関連性も見出したい。

「(ii) Uhlenbeck-中島の ε 正則性定理」の類似には、V の「エネルギー密度」（積分因子）v が「Bochner 型不等式」を満たす（v がある発散形楕円型方程式の劣解になる）ことを示す必要がある。v は Yang-Mills 汎関数のエネルギー密度よりかなり複雑な形をしており、そのぶん処理が難しい。Yang-Mills の場合の証明に重要だった Weitzenböck 公式の類似は [論文 22] で示せており、最高次の微分は上手く扱えることがわかった。低次の微分の項が煩雑であるが、もういくらかの技術的工夫で上手く評価できると見込んでいる。

[研究 2] G_2-dDT 接続を用いた (Morse-)Floer homology

「研究成果 (Ⅲ) 」で述べたように、3 次元多様体上の平坦接続に対する instanton Floer homology (IFH) の類似の観察が $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-dDT 接続の間にも見られる。したがって [研究 1] の更なる発展として、G_2-dDT 接続を用いた Floer homology の構成ができるかもしれない。そこで、まず IFH の類似として以下の問いを調べたい。

(a) シリンダー上の Spin(7)-dDT 接続の変形複体は Fredholm か？その (相対 Morse) 指数を上手く表示できるか？(b) 「ホロノミー摂動」でモジュライ空間が滑らかになるか？

証明の基本的な方針は、IFH の場合と同様でよいと思われる。しかし [論文 21] の考察は「ある条件」下のみで成り立ち、それによるかなりの技術的な困難が予想される。一方、その困難さは主に $G_2, \mathrm{Spin}(7)$ 幾何の複雑さに由来するものであるため、今までの [論文 13–16] の研究や、[研究 1] で発展させた技術で解決できる範囲だろうと見込んでいる。その後、他の Floer homology の理論も参考にしつつ、(1) シリンダー上の Spin(7)-dDT 接続のモジュライ空間はコンパクト化可能か？(2)Floer homology が構成できたならば、それがどの程度幾何構造や摂動に依存するか？(3)A_∞ 構造などの高次の積構造が入るか？等について考えていきたい。

[研究 3] 平均曲率流の「ミラー」

[論文 16] ではミラー平均曲率流 (MCF) の短時間存在と一意性を示した。部分多様体に対する通常の MCF の研究は多くあり、ミラー MCF でも多くの類似の結果が期待される。

[論文 16] から $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-dDT 接続は「体積」を最小にする。そこで $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-dDT 接続の安定性（それらの十分近くからミラー MCF を流すと $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-dDT 接続に収束するか）を調べたい。証明には、Lagrangian MCF に対する H. Li の手法の類似を考えている。つまり、線形化方程式の第 1 固有値が十分大の仮定のもと、ミラー平均曲率の L^2 ノルムの指数関数的減衰等を示す。ミラー対応から成立が期待されるが、適宜安定性が知られている他の flow (G_2 多様体上の Laplacian flow 等) も参照しつつ研究を行う。