

これまでの研究成果のまとめ(北澤 直樹) Morse 関数の理論とその高次元化について、「可微分写像の特異点論」と「多様体の幾何学への応用」をキーワードとして研究してきた。具体的な可微分関数・写像を(特異点論や幾何学における)重要な道具・(構成は一般に難しい中)構成することを含めた研究の対象としてきた。以下最近の研究である。

- 可微分多様体には Morse 関数が必ず、たくさんある。特異点から多様体のホモロジー群等代数的な情報や変形に関するホモトピーの情報が見える。これを高次元化する流れが、前世紀半ば Thom や Whitney により始められ、Levine そして Eliashberg らを経て「佐伯 修 氏(九州大学)」「佐久間 一浩 氏(近畿大学)」らに引き継がれた。折り目写像という、局所的に Morse 関数と恒等写像の直積であるような写像のクラスがある。例えば、球面の射影は特異点の集合が赤道に一致しそれが埋めこまれた感じになる。これを一般化した同心円形折り目写像というものを重要と考え導入した。このクラスで、基本的な代数的不変量の計算を行い、球面上の球面をファイバーとする束の連結和であるような多様体等基本的な多様体に非自明な例を構成した(発表論文 1.1、1.2、2.1、3)。余次元  $-1$  の場合について分類した他また、3次元向き付け可能閉多様体がこの写像を持つための必要十分条件が「所謂グラフ多様体であること」というのを明らかにできた(それぞれ発表論文 1.5、1.7)。
- ホモトピー球面上の、特異点を丁度 2 個有する Morse 関数、単位球面の射影は、special generic 写像へと一般化される。前述の流れで Burlet 氏 De Rham 氏が 1970 年代に定義し佐伯氏佐久間氏が 21 世紀に入る直前あたりから活発に研究してきた。この写像は、定義の厳しさから、多様体の位相や可微分構造は強い制限を受ける。一方、球面の直積の連結和で表せる多様体等はかなりの状況下で自然な special generic 写像をもつ。コホモロジー環に着目し、Special generic 写像をもつための制限を多く明らかにした(発表論文 4.1–4.6、4.11)。例えば射影空間が殆どの次元のユークリッド空間に special generic 写像を持たないことを示した。
- Reeb グラフは、滑らかな関数の逆像の連結成分からなる商空間で、閉多様体上の臨界値の集合が有限であるような関数の場合、臨界点を含むような連結成分を頂点としてグラフになる。20世紀半ばには登場しており、多様体を簡略化する重要な道具である。可視化等への応用でも重要である。Sharko は、2006 年「与えられたグラフと同型な Reeb グラフを持つような良い性質を有する滑らかな関数が作れるか」という問題を出し、Sharko そして続いて佐伯氏とその学生であった「増本 泰隆 氏(九州大学)」が結果を改良する形で任意の有限グラフに関し閉曲面上の関数を構成した。その後 Michalak が臨界点を含まないような連結成分が球面であるような Morse 関数を適切な条件を満たすようなグラフに対し構成した。自身は、逆像のトポロジーも(球面とは限らないものを)前もって与えて良いクラスの関数を構成、閉多様体とは限らない多様体上の関数を構成する等という新たな試みにも成功した(それぞれ発表論文 1.3、1.4)。最近では、代数幾何等に関連する学際的な領域で、適切なグラフを与え実代数関数を構成することにも成功している(発表論文 1.6、2.2、4.9、4.10)。