真鍋 征秀 (Masahide Manabe)

今後の研究計画

2 次元重力理論と位相的漸化式． CEO 位相的漸化式は 2 次元重力理論と関連する幅広い理論に普遍的に適用されるが，それに触発されて，2017 年に，境界付きリーマン面のモジュライ空間の Weil-Petersson 体積に対する Mirzakhani 漸化式の一般化が Andersen-Borot-Orantin により提案された (以下，ABO 位相的漸化式とよぶ)．また同時期に，Virasoro 束縛条件に対応する一般化が Kontsevich-Soibelman と Andersen-Borot-Chekhov-Orantin による量子エアリー構造として提案された．List of Publications [22] で我々は，これら 3 つのアプローチ (CEO 位相的漸化式，ABO 位相的漸化式，量子エアリー構造) を用いて，2 次元 $(2,p)$ ミニマル重力理論 (p は奇数) やその Masur-Veech 型ツイスト，およびそれらの超対称類似の研究を行った．ここで，$(2,p)$ ミニマル重力理論に対するモジュライ体積は $p \to \infty$ で Weil-Petersson 体積を与えるような一般化として理解できる．今後は $(2,p)$ ミニマル重力理論以外へのこれらのアプローチの応用可能性を探り，その理解を深めたい．また最近，藤博之氏，綿引芳之氏と共同で $(2,p)$ ミニマル重力理論に対して知られている "ハミルトン形式" から CEO 位相的漸化式がどのように導出されるのかを議論している．CEO 位相的漸化式は，このハミルトン形式よりも広い理論的枠組みを提供すると考えられるが，どのような理論的枠組において CEO 位相的漸化式がハミルトン形式で記述できるのかという問題について今後理解を深めたい．

3 次元超対称ゲージ理論と結び目不変量． List of Publications [20] で我々は，3 次元球面 S^3 内の任意の結び目の colored Jones 多項式を 3 次元超対称ゲージ理論における K 理論的 vortex 分配関数として与えるようなアーベル型ゲージ理論 "knot-gauge theory" を構成した．ここで，その構成の為に，2015 年に Benini-Zaffaroni により超対称局所化の方法で得られた $S^2 \times S^1$ 上の超対称ゲージ理論の A-twisted 分配関数 (twisted index) とその K 理論的 vortex 分配関数への "因子化" を用いた．knot-gauge theory は，"colored Jones 多項式 =K 理論的 vortex 分配関数" という関係を与え，この式の左辺は結び目の連続変形に対する位相幾何学的量子不変量を与える一方で，この式の右辺は vortex を数え上げる代数幾何学的数え上げ不変量と関係する．ただし，我々の vortex 分配関数の構成は上記の通り "因子化" の方法による "間接的な" 構成なので，今後は vortex モジュライ空間自体の "直接的な" 構成を明らかにしたい．また，knot-gauge theory は結び目に対するタングル図によりラベルされ，その交点に割り当てられる R 行列に対応して理論の基本構成要素が与えられている．結び目不変量である colored Jones 多項式は，タングル図に対するライデマイスター移動で不変な量として定義できて R 行列の性質がこの不変性を保証するが，一方，ライデマイスター移動により knot-gauge theory は非自明な変換を受けるので，その変換前後のゲージ理論的な関係も明らかにしたい．別の興味深い問題として，colored Jones 多項式の圏化を与える Dunfield-Gukov-Rasmussen による refinement のパラメータ t (homological grading) の R 行列への導入が考えられる．現在まで任意の結び目に対して，このような refinement を与える結び目不変量のタングル図を用いた明快な計算方法は知られておらず，knot-gauge theory におけるパラメータ t の導入と合わせて本研究で取り組みたい．

非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論． 位相的弦理論において弦の結合定数に関する摂動論を超えた非摂動論的定式化は重要な問題である．この方向の研究として，例えば，局所 toric Calabi-Yau 3-fold 上の位相的弦理論の振幅 (Gromov-Witten 不変量) を与える CEO 位相的漸化式に非摂動的補正を加える Eynard-Marino による提案や，精密化された (refined) 位相的弦理論 (位相的弦理論の 1 パラメータ変形) のある極限 (Nekrasov-Shatashvili 極限) が位相的弦理論の非摂動補正を与えるという議論がある．ここで，精密化された位相的弦理論は上記の colored Jones 多項式の圏化とも関係があることが知られているので，これは位相的弦理論における非摂動論と圏化の間に何か関係があることを示唆していると考えられる．非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論はともに未開の数理 (位相幾何学，代数幾何学，数え上げ幾何学) を含んでおり，これらの関係を明らかにすることを目指して，まずはそれら自体の理解を進めたい．さらに，位相的弦理論ではブレイン (開弦の端点を束縛するラグランジアン部分多様体を与える境界) の導入により標的空間の量子化が実現されるので，精密化された位相的弦理論においては標的空間の "二重量子化" が実現されると考えられる．この二重量子化と位相的弦理論の非摂動補正との関係も本研究で明らかにしたい問題である．