(2) これまでの研究成果のまとめ

真瀬 真樹子

パート I. カップリング双対性に付随した $K3$ 曲面族の双対性

本研究の目的は, Ebeling により導入されたカップリング双対を $K3$ 曲面に関連した関係性によって理解することである. $K3$ **重み系** とは well-posed な正の整数の重み系 $(a_0, a_1, a_2; d)$ であって, 重み (a_0, a_1, a_2) に関して次数 d の一般の準斉次式が単純 $K3$ 特異点を定めるものである. 米村の研究により, 同型を除き 95 個の $K3$ 重み系が存在することが知られている. **(強) カップリング双対** は一般に well-posed な正の整数の重み系に対して定義される概念である.

この研究では, $K3$ 重み系の間の強カップリング双対組に焦点を当て, 以下の問題を考えた.

(1) 強カップリング双対は, $K3$ 曲面族の間の多面体双対に拡張するか.

(2) もし, 強カップリング双対が多面体双対に拡張したならば, その組は $K3$ 曲面族の格子双対性に拡張するか.

いずれの問題に対しても論文では部分的に肯定的な答えを出すことができた. 問 (1) では, 多面体双対性を与える反射的多面体を具体的に構成し, 問 (2) では格子双対性となるような族の Picard 格子を導出した.

従って, 次の意味で強カップリング双対の言い換えをすることが結論付けられた.

(i) 二つの Calabi-Yau 多様体の Hodge ダイヤモンドの双対性の意味での古典的なミラー対称性の意味.

(ii) 偏極付き $K3$ 曲面の間の “Dolgachev-Nikulin ミラー” の意味.

パート II. 点付き曲線の Weierstrass 半群 と $K3$ 曲面 (米田 二良 教授との共同研究)

本研究の目的は Weierstrass 半群により $K3$ 曲面に存在, 及び非存在の代数曲線の特徴付けを行う事である. 出版された論文では, 次の二つの定理が示された:

(A) 種数 g の超楕円曲線 C の二重被覆として得られる曲線 $\tilde{C}$ の種数が g^2+4g+6 以上ならば $\tilde{C}$ はどんな $K3$ 曲面上にも存在しない. (これは Reid による定理の拡張である.)

(B) 数値的半群 H に対して写像 d_2 を $d_2(H) := \{h/2 \,|\, h \in H : \text{ even}\}$ と定める. このとき, Weierstrass 半群の無限列 $\{S_l\}$ と $\{H_l\}$ を写像 d_2 を用いて構成した. ただし, $\{S_l\}$ は対称的であり, $\{H_l\}$ は非対称的である. 更に, いずれの無限列に現れる半群も, 実現される代数曲線は, $K3$ 曲面上に存在しない.

これらの結果は主に Reid により与えられた判別方法と, “二重被覆型” Weierstrass 半群に対する重要な事実を用いて証明された.