研究成果（枡田幹也）　２０２４年１月

2000 年頃、枡田は、代数幾何と組合せ論を繋ぐ架け橋であるトーリック幾何を、トポロジーの観点から展開できるのではないかとの着想を得、服部晶夫先生の協力を得て研究を進めていた。一方、同時期に全く独立に、モスクワ大学の Buchstaber と Panov が、我々とは異なる立場からトーリック幾何をトポロジーの観点から展開していた。2001 年のポーランドでの国際会議でそのことを Panov から知った枡田は、彼を何度か日本へ招聘して共同研究を行い、トーリック幾何では見られなかった新たな視点、問題が数多く生まれた。その後研究者が増え、この 20 年の目覚ましい発展により、トーリックトポロジーという分野が生まれるに至った。トーリックトポロジーに関連する枡田のこれまでの主な研究成果は以下である。

（１）n 次元コンパクトトーラス $(S^1)^n$ 作用をもつ $2n$ 次元の滑らかな閉多様体をトーラス多様体という（正確には、不動点をもつことと向きが定まっていることを課す）。コンパクト非特異トーリック多様体（以下、トーリック多様体とよぶ）は作用を制限することによりトーラス多様体と思える。このトーラス多様体に対し、扇の概念を拡張した多重扇を対応させることでき、それを通して、トーリック幾何をトポロジーの観点から展開し、かつ、拡張できることを示した。ただ、トーラス多様体から多重扇への対応は単射ではない。その後、石田ー福川との共同研究において、位相的トーリック多様体と位相的扇の間に全単射があることを示した。これは、コンパクトで特異点がない場合におけるトーリック幾何の基本定理をトポロジーの観点からの完全な拡張になっている。

（２）単体的凸多面体の面数は、３つの条件で特徴づけられており、g 定理という名で知られてる。これら３つの条件が必要条件であることは、Stanley によってトーリック幾何を使って示された。1980 年代のことである。単体的凸多面体は球面の三角形分割を与えているが、三角形分割の概念を弱めた概念として、単体的セル分割がある。枡田は、トーリックトポロジーのアイデアを用いて、球面の単体的セル分割に対して、それらの面数の特徴づけを行った。

（３）トーリック多様体は、代数多様体としては扇で分類できるが、微分可能多様体としての分類は分かっていない。これに関して、コホモロジー環が微分可能多様体を区別するのではないかとの感触を得、コホモロジー剛性問題として提案した。これまでのところ、部分的肯定的解決が知られているが、反例は知られていない。

（４）実トーリック多様体のトポロジー版として、small cover と呼ばれるものがある。n 次元 small cover は、n 次元単純凸多面体 P の $2n$ 個のコピーをファセットで張り合わせてできる閉多様体で、$(\mathbb{Z}/2)^n$ 作用をもつ。Small cover の多くは、aspherical 多様体である。特に P が Pogorelov 多面体とよばれる３次元凸多面体のとき、３次元双曲多様体が得られる。Buchstaber, Erokhovets, Panov, Park 氏らとの共同研究で、これらの３次元双曲多様体が $\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー環で区別できることを示した。