今後の研究計画

名古屋工業大学 南 範彦[1]

代数幾何の階層構造として私が取り組みたいのは，以下の二つのタイプのものです：

(A) 基礎体 k を完全体とし，rationality (有理性) と ruledness (線織性) を interpolate する，次の (誰でも思いつきそうな) 階層構造 を考えます (ここで $\overset{\text{bir}}{\sim}$ は双有理同値を表します)：

$$\begin{cases} X \text{ is } \underline{(-i)\text{-}rational} \text{ or } \underline{(n-i)\text{-}ruled} & \text{for } 0 \le i \le n-1, \\ \text{if } \exists \text{ an } i\text{-dimensional variety } Z^i \text{ s.t. } \mathbb{P}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} X. \end{cases} \tag{1}$$

そして，Lüroth 以来，多くの数学者により研究されている，rational から rationally connected までの階層構造を，同様な 階層構造 たちの間の階層構造

$$\begin{aligned} (-i)\text{-rational} &\Longrightarrow \text{stable } (-i)\text{-rational} \Longrightarrow \text{ratract } (-i)\text{-rational} \\ &\Longrightarrow \text{separably } (-i)\text{-unirational} \Longrightarrow \text{separably } (-i)\text{-rationally connected} \\ &\Longrightarrow (-i)\text{-rationally connected} \end{aligned}$$

にアップグレード出来ることを示し，これを探究することを基本的目標とします．

(B) 双有理幾何と，双正則幾何を補間する 階層構造 を誘導する，次の概念を導入します：

Let us call two equi-dimensional X, Y be $\underline{\text{codimension} > c \text{ birational equivalent}}$,
if there are dense opens $U \subset X$, $V \subset Y$ such that

$$\begin{cases} \operatorname{codim}_X (X \setminus U) > c, \qquad \operatorname{codim}_Y (Y \setminus Y) > c \\ X \supset U \cong V \subset Y \end{cases}$$

勿論，$c = 0$ の場合，この同値関係は双有理同値に他なりませんし，c が増えるにつれて，双正則同値に近づいていきます．この階層的同値関係やその類似の同値関係に関する不変量の研究に興味があるのです．

さて，**(A)** 型の階層構造 に関しては，既に幾つかの結果を得て，それらを学会等で発表してきました．特に次の論文を arxiv に upload しました：

[業績書, p.18, 論文 15] Norihiko Minami, Generalized Lüroth problems, hierarchized I: SBNR - stably birationalized unramified sheaves and lower retract rationality, **arXiv:2210.12225**

ここでは，Morel 氏が彼のモチビックホモトピー論に関する代表的著作である $\mathbb{A}^1$-Algebraic Topology over a Field (SpringerLNM 2012) で導入された任意の unramified Zariski sheaf$S$ に対し， SBNR - stably birationalized unramified Nisnevich sheaf - という birational subsheaf S_{sb} $(\subseteq S)$ が構成出来ることを示しました．S_{sb} は birational sheaf なので Colliot-Thélène 氏の注意により，安定双有理不変 となり，また Colliot-Thélène 氏の別の結果より，任意の smooth proper スキーム X に対し，$S_{sb}(X) = S(X)$ という，問題（2）への応用の観点からも，極めて使いやすい性質を満たすなることもわかります．しかも Morel 氏の unramified Zariski sheaf は，斎藤秀司氏，小泉淳之介氏により，Kahn-Saito-Yamazaki(ComposMath 2016) の定義した極めて一般な reciprocity sheaves をも含みます．特に，unramified cohomology, Kahler 微分の層も含む極めて一般な層であることも従います．S_{sb} の構成の証明に於いては，Novacoski-Spivakovsky 両氏が local uniformization の結果 (Josnei Novacoski, Mark Spivakovsky, Reduction of local uniformization to the rank one case, Valuation theory in interaction, 404–431, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2014) を得たときに用いた手法が，極めて本質的な役割を果たします．

一方，**(B)** 型の階層構造にの例として，integral Hodge/Tate conjecture の反例に生じる torsion 部分の，余次元に応じて双有理不変性と双正則不変性の間を階層的に補間する不変量としての解釈に関する研究を行い，可成り一般的な結果が得られたので，それを執筆中です．なお，この論文で導入した一つの簡単な概念を用いると，全ての余次元で integral Hodge/Tate 予想が成立する scheme が極めて役立つごとが分かります．射影空間や smooth projective toric variety や Flag variety などの cellular decomposition をもつものなどがその様な例であることは良く知られていますが，3 次元極小モデル理論の成果を応用した，Voisin さん (ASPM 2006) の 3 次元 uniruled (この場合小平次元 $-\infty$ の条件と同じ) の場合や，Totaro さん (JIMJusseiu 2021) の 3 次元小平次元 0 で適当な条件付きの場合 (実際これがないと，反例が有る) に，integral Hodge 予想が成立する定理は，極めて深く，これらの例に適応した場合の，実りある応用が期待されます．この状況では，3 次元極小モデル理論という，普通に考えたらその適応は，双有理不変な状況で，3 次元の場合に限られるだろう，と思われるものが，双有理不変と双正則不変を階層的に補間し，しかも任意次元の (体上 separated finite type な) スキームに対して適応されることが極めて興味深く思われます．

[1] e-mail: nori@nitech.ac.jp