これまでの研究成果のまとめ

名古屋工業大学 南 範彦[1]

1 これまでの研究内容 - 1

私は当初から，ホモトピー論における時代時代の最も重要な問題たちを動機として，研究を行ってきました．例えば，

[業績書, p.5, 論文 9] Norihiko Minami, The Kervaire invariant one element and the double transfer」 Topology, vol. 34 (1995) p.481-488.

[業績書, p.6, 論文 10] Norihiko Minami, The Adams spectral sequence and the triple transfer, American Journal of Mathematics, 117, no.4, 965—985

[業績書, p.8, 論文 14] Norihiko Minami, The iterated transfer analogue of the new doomsday conjecture, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no.6, 2325-2351.

において，後に Hopkins, Ravenel らによって示された Kervaire 不変量１の元の有限性を含む,『New Doomaday Conjecture (新・世界最後の日予想)』と名付けた球面の安定ホモトピー群の極めて一般な有限性予想を定式化し，その supporting evidence を提出しました．しかしながら，一般の『New Doomaday Conjecture (新・世界最後の日予想)』は極めて難しく，伝統的なホモトピー論的手法では，全く手が出ない，という結論に辿り着きました．ホモトピー論の真に大域的な問題には，他にも Hopkins の chromatic splitting conjecture というものが有ります．これに関しても，

[業績書, p.12, 論文 20] Norihiko Minami, On the chromatic tower, American Journal of Mathematics, 125 (2003), no. 3, 449-473,

である程度の成果を得ましたが，やはり，一般の『chromatic splitting conjecture』は極めて難しく，伝統的なホモトピー論的手法では，全く手が出ない，という結論に辿り着きました.

2 これまでの研究内容 - 2

以上のように，伝統的なホモトピー論的手法の限界に感じていた私は，あてもなく他分野にその手掛かりを求めるようになりました，その一つが，Riemann 予想へのアプローチとして生み出された Connes, Concani, 小山，黒川らの諸氏によって展開された,『一元体』$\mathbb{F}_1$ 上の $\mathbb{F}_1$-スキームの研究です．これに関して，小山さんと黒川先生の予想の解決

[業績書, p.14, 論文 25] Norihiko Minami, On the random variable
$\{1, 2 \ldots, , n\}^r \ni (k_1, k_2, \ldots, k_r) \mapsto gcd(n, k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}$,
Journal of Number Theory, 133 (2013), no. 8, 2635–2647

を始め，幾つか論文を書きましたが，更なる進歩への本質的困難さを感じました.

その一方で，同変安定コホモトピー群に値を持つ Bauer-Furuta Seiberg-Witten 不変量を用いた，4 次元多様体の研究にも取り組みました．古田，亀谷，松江の諸氏とも幾つかの共著論文を書きましたが，

[業績書, p.13, 論文 23] Miko Furuta, Yukio Kametani, Hirofumi Matsue, Norihiko Minami, Homotopy theoretical considerations of the Bauer-Furuta stable homotopy Seiberg-Witten invariants, Geometry & Topology Monographs 10 (2007) 155-166.

(の §6, Nilpotency rules!) で私が辿り着いた最終結論は，伝統的なホモトピー論では，いくら input に Seiberg-Witten 方程式を用いても，4 次元多様体論最大の未解決問題である松本幸夫先生の 8 分の 11 予想は決して解けないということです．このことは，単に更なる進歩への本質的困難に遭遇したのとは全く異なり，長年『古典的ホモトピー論は深いはずだ』と信じて研究を続けてきた私にとって，極めてショックなことでした.

ところがここで光明が指します．Morel-Voevodsky のモチビック・ホモトピー論の基礎体 k が複素数体の部分体ならば，そのモチビック・ホモトピー論が古典的ホモトピー論 (の全ての情報) を含むことが，その構成方法から分かるのです．そこで狙うべきは，このより本質的に深い情報を持った，モチビックホモトピー論の大域的な性質を明らかにすることです．そこで,

[業績書, p.14, 論文 27] Norihiko Minami, From Ohkawa to strong generation via approximable triangulated categories - a variation on the theme of Amnon Neeman ’ s Nagoya lecture series, 16-88, Bousfield classes and Ohkawa’s theorem. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 309. Springer, 2020.

において，そうした大域的な問題を定式化して,『大川哲介さんからの宿題』 という形で提出しました．モチビック・ホモトピー論の場合，これはモチビック安定ホモトピー圏の所謂 thick ideal の決定問題という，極めて困難な問題となります．それでも，これに対するヒントが，古典的ホモトピー論における，Hopkins-Smith の thick ideal の決定定理によって与えられます．実際，Hopkins-Smith の thick ideal の決定は，ある階層構造によって与えられますので，モチビック安定ホモトピー圏の thick ideal たちも，何らかの階層構造を持って現れることが予想されます．モチビック安定ホモトピー圏は代数幾何の抽象的ホモトピー論ですので，この研究から，私が全精力を込めて取り組むべきことが何か，はっきりと確信しました：

『代数幾何の階層構造を探究せよ！』

[1]e-mail: nori@nitech.ac.jp